UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Facultad de Informática

Trabajo fin de carrera

# REPRESENTACIÓN DEL CONOCIMIENTO IMPRECISO: REVISIÓN PARCIAL DE LAS TEORíAS DE CONJUNTOS BORROSOS

Autor: Sergio Guadarrama Cotado

Tutor: Enric Trillas

*A mis profesores, maestros y amigos*

*A mi familia*

# Índice General

# Agradecimientos

Llegado este momento es hora de agradecer de todo corazón a las personas que me han ayudado de forma directa o indirecta a la consecución de este trabajo fin de carrera.

En primer lugar quisiera agradecer a mi familia todo su apoyo y compresión que me han dado; sin ellos no habría podido llegar hasta aquí.

Quiero agradecer especialmente a Susana Cubillo y a Elena Castiñeira toda la paciencia y ayuda que me han prestado a lo largo de este año mientras me adentraba en el mundo de la lógica borrosa, así como, sus esfuerzos al revisar mis borradores intratables. También quiero agradecer a Antonio Giraldo su amabilidad al prestarme libros y programas, pero sobre todo por su buena disposición ante mis inoportunas preguntas.

También quiero agradecer a Julio Gutierrez la oportunidad que me brindó al permitirme asistir al congreso del IPMU2000, donde pude conocer a muchas personas que ampliaron mis horizontes. Agradecer a Ana Pradera todas sus respuestas a mis dudas. Agradecer a Ana García Serrano y a Martín Molina su ayuda al buscarme un lugar y una mesa donde poder trabajar.

Pero sobre todo a Enric Trillas a quien acudí buscando un tutor para mi trabajo fin de carrera y en quien encontré a un maestro y a un amigo. Gracias por tu paciencia, tu disponibilidad, tus enseñanzas, por sembrar en mí la curiosidad y aplicarme la presión y la temperatura adecuadas para dar frutos; gracias por todo.

Por último, aunque no por ello menos importante, a mis amigos por todo lo que hemos vivido juntos y en especial a Verónica por haber revisado mis borradores, pero sobre todo por estar siempre conmigo.

Gracias a todos.

# Resumen

Este trabajo comienza con una descripción del concepto de conocimiento, una clasificación de los tipos de conocimientos que nos interesan y una relación de los métodos que se han usado para representar los distintos tipos de conocimientos, así como el interés en usar la lógica borrosa para representar conocimiento impreciso.

En el capítulo 2 expondremos qué son los conjuntos borrosos y su origen, así como, las distintas interpretaciones que se hacen de los conjuntos borrosos y las diferentes técnicas utilizadas para hallar su función de pertenencia.

En el capítulo 3 efectuaremos una recopilación de las teorías de conjuntos borrosos hasta llegar a las teorías estándar y las teorías de conjuntos imprecisos, como propuesta axiomática para intentar clarificar qué es una teoría de conjuntos borrosos. También plantearemos las limitaciones que éstas tienen para representar conocimiento impreciso.

En el capítulo 4 expondremos un nuevo concepto de conjunto borroso como representación del uso de un predicado en el lenguaje. Propondremos después, un método para representar predicados, variables lingüísticas, relaciones entre predicados y razonamiento no formal (basado en conocimiento), apoyado en el uso de varias teorías estándar.

En el capítulo 5 explicaremos las características del sistema CW00(Computing with Words prototipo 0 - versión 0) que hemos construido para representar conocimiento impreciso a partir de las propuestas del capítulo anterior.

En el capítulo 6 sacaremos las conclusiones que se deriven de la revisión de las teorías de conjuntos borrosos y su mejor adecuación para la representación del conocimiento, siendo CW00 a la vez un buen ejemplo del uso simultaneo de diversas teorías y un sistema para experimentar con los conjuntos borrosos en el lenguaje.

# Introducción y objetivos

Vamos a centrar nuestro estudio en los conocimientos de sentido común, los cuales son flexibles y variables en el tiempo; son los que usamos para desenvolvernos en un mundo cambiante y dinámico. Si nuestros conocimientos fueran estáticos y rígidos nuestra capacidad de adaptación al medio que nos rodea decrecería rápidamente, ya que no seríamos capaces de adaptarnos ante nuevos problemas o situaciones.

Lo que intentamos emular es el razonamiento de sentido común, el cual nos permite tomar decisiones en base a nuestros conocimientos y con poca información disponible o con información contradictoria, y además nos permite revisar los conocimientos que poseemos para adecuarlos ante nuevas informaciones. No intentamos, sea dicho por exceso, cambiar la forma de pensar de las personas sino la forma de "pensar" de las máquinas.

Consideramos el "conocimiento impreciso" como el tipo de conocimiento específico del razonamiento de sentido común, diferenciándolo del "conocimiento preciso" que caracteriza el razonamiento formal.

Para la representación del conocimiento preciso la Inteligencia Artificial ha utilizado gran variedad de métodos (que han dado exitosos resultados), como por ejemplo, el compilador Prolog. Así mismo, para la representación de la incertidumbre en el conocimiento (conocimiento incierto) se han usado también distintos tipos de representación, como por ejemplo las Redes Bayesianas. En el caso del conocimiento impreciso una herramienta bastante utilizada para su representación son los conjuntos borrosos (Fuzzy Sets), que ha conseguido notables logros teóricos y aplicaciones prácticas en las últimas décadas.

El objetivo de este proyecto es revisar tanto el concepto de conjunto borroso desde la perspectiva de representación del conocimiento impreciso como las teorías actuales de conjuntos borrosos, para que nos permitan desarrollar un sistema informático que incluya antónimos, negaciones, conectivos, modificadores lingüísticos, implicaciones ..., que estén de acuerdo con la semántica de cada problema.

# Capítulo 1

# Conocimiento impreciso

En este capítulo comenzaremos describiendo qué entendemos por "Conocimiento" a partir de la definiciones de "Datos"y de "Informaciones", distinguiendo a continuación distintos tipos de conocimiento: por un lado conocimiento preciso y conocimiento impreciso; por otro conocimiento cierto y conocimiento incierto.

Posteriormente expondremos algunos de los métodos que se han usado para representar conocimiento. Así mismo, mostraremos el interés en utilizar la lógica borrosa para representar conocimiento impreciso.

## 1.1 ¿Qué entendemos por conocimiento?

Para describir conocimiento nos vamos a basar en la descripción de conocimiento propuesta por Juristo y Pazos en [GNCJ97]. De ese modo describiremos conocimiento de la siguiente manera:

> Los conocimientos por una parte son generalizaciones y abstracciones realizadas sobre datos e informaciones, y por otra, son las relaciones que extraemos de los datos y las informaciones. Los conocimientos permiten extraer nuevas informaciones a partir de los datos y las informaciones presentes o explicitar informaciones que están de modo implícito en los datos y las informaciones existentes. Los conocimientos sirven básicamente para entender el mundo y resolver problemas. En consecuencia los conocimientos conciernen básicamente, al aspecto pragmático o de utilización de la información en general.

Esta noción de conocimiento supone dos nociones previas: la de “Datos”y la de “Informaciones”.

> Datos, son los elementos sintácticos no estructurados y de contexto libre que denotan hechos y conceptos sobre un estado de casos. En su forma más simple se traducen en el valor que toma un variable.
>
> Informaciones, contienen un conjunto de datos relacionados y estructurados dentro de un contexto que les aporta significado. Es decir, información es el significado que se atribuye a un conjunto de datos relacionados y estructurados a partir de las reglas convencionales empleadas para su representación, que son el contexto.

Vamos a distinguir los siguientes tipos de conocimiento:

- Conocimiento preciso: Diremos que un conocimiento es preciso cuando lo hayamos extraído mediante especificación, de un conjunto de datos e informaciones que son completos y determinados.

- Conocimiento impreciso: Diremos que un conocimiento es impreciso cuando lo hayamos extraído mediante generalización, de un conjunto de datos o informaciones incompletos o infradeterminados; siendo la imprecisión una cuestión de grado.

- Conocimiento cierto: Diremos que un conocimiento es cierto cuando lo hayamos extraído mediante deducción, de un conjunto de datos e informaciones que consideramos que son verdaderos.

- Conocimiento incierto: Diremos que un conocimiento es incierto cuando lo hayamos extraído mediante inducción, de un conjunto de datos e informaciones que no sabemos si son verdaderos, sólo confiamos en que lo sean; siendo la incertidumbre una cuestión de grado.

Dentro de esta definición tan amplia de conocimiento, nos vamos a centrar en el conocimiento comunicable mediante el lenguaje, y especialmente en el conocimiento impreciso expresado a través del lenguaje.

Las razones que nos llevan ello son varias:

- El conocimiento de sentido común, aquel que específicamente nos interesa, se comunica a través del lenguaje.

- El medio a través del cual adquirimos la mayoría de nuestros conocimientos es el lenguaje.

- El lenguaje está especialmente adaptado para la transmisión de conocimientos imprecisos.

- La mayoría de los predicados usados en el lenguaje natural son imprecisos.

Se plantea entonces un dilema filosófico:

> "El lenguaje es impreciso para poder expresar conocimientos imprecisos. O los conocimientos son imprecisos porque usamos un lenguaje impreciso en su aprendizaje, razonamiento y comunicación."

Este dilema que ha preocupado (y todavía lo hace) a filósofos, lingüistas y psicólogos, está lejos de ser resuelto. Pero en lo que todos parecen estar de acuerdo es en que ambos, conocimiento y lenguaje, son imprecisos, y que sus imprecisiones están fuertemente relacionadas.

Si una persona a través de la expresión lingüística de un conocimiento es capaz de aprenderlo, esto quiere decir, que ese conocimiento está incluido en el significado de la expresión. Y si eso es así, una buena forma de representar ese conocimiento es representando el significado de su expresión en el lenguaje. Esto es lo que intenta hacer la lógica borrosa, representar el significado de proposiciones del lenguaje. Aportando para ello un marco teórico que soporte la imprecisión.

De hecho Zadeh define en [Zad92] conocimiento del siguiente modo:

> "En sentido amplio, el conocimiento se puede conceptuar como un conjunto de proposiciones. Para constituirse en conocimiento, una proposición debe ser comprensible. En este sentido, significado y conocimiento están estrechamente interrelacionados."

Si queremos representar el conocimiento, necesitaremos por tanto una herramienta que sea capaz de representar el significado de proposiciones comprensibles para las personas.

Si además queremos manejar el conocimiento que hayamos representado, necesitaremos que la herramienta sea capaz de representar relaciones entre conocimientos y que nos permita un tipo de razonamiento que se parezca lo más posible al razonamiento de sentido común, que es más un razonamiento aproximado que un razonamiento exacto.

A continuación expondremos las herramientas que han sido utilizadas para representar conocimientos y el modelo de razonamiento que proponen.

## 1.2 Formas de representar conocimiento

Para representar el conocimiento preciso y cierto, se han usado gran variedad de modelos en la Inteligencia Artificial, siguiendo la clasificación hecha en [Cue97]:

1. Reglas de producción, formas derivadas de una flexibilización en la formulación de algoritmos y cuyo modelo de razonamiento, por tanto, es el encadenamiento de reglas en pasos sucesivos.

2. Reglas clausulares, cuyo método de razonamiento es un demostrador lógico al que se asocia un proceso de extracción de respuestas.

3. Redes semánticas y marcos, basados en estructuras de información representativas de la memoria asociativa humana cuyo método de razonamiento se basa en la exploración de la estructura de información en busca de subestructuras que satisfagan condiciones pregunta.

4. Restricciones, formuladas como representaciones cualitativas de ecuaciones e inecuaciones numéricas, con el fin de servir de base a modelos de razonamiento para simulación de procesos físicos o para representar condiciones de unificación en la moderna programación lógica.

Para representar los conocimientos precisos pero inciertos se han usado distintos métodos, siguiendo la clasificación hecha en [Cue97]:

1. Modelos empíricos: Para representar la incertidumbre inventaron una medida de certeza que manejaban siguiendo unas reglas híbridas de lógica y probabilidad. Ej: MYCIN, PROSPECTOR. Útiles si un experto es capaz de asignar medidas de certeza.

2. Modelos probabilísticos: Surgieron como alternativa a los modelos empíricos para corregir sus contradicciones. Para manejar la incertidumbre usan la teoría de la probabilidad aunque no sólo la teoría de la probabilidad. Ej: Modelo de Nilsson, Modelo Dempster y Shafer, Redes Bayesianas. Útiles si podemos podemos obtener la certeza a partir de la repetición de experimentos.

3. Modelos posibilísticos: Teorías de posibilidad que entienden los conjuntos borrosos como distribuciones de posibilidad y usan la lógica borrosa para su manipulación. Útiles si no podemos obtener la certeza a partir de la repetición de experimentos.

En la representación de conocimiento cierto o incierto pero preciso se han conseguido notables avances, obteniendo modelos tanto de representación como de razonamiento.

Pero en cuanto a la representación de conocimiento impreciso o de conocimiento incierto pero no repetible se refiere, hasta que se utilizó la lógica borrosa y la teoría de la posibilidad para representarlos no hubo una herramienta que lo representara adecuadamente.

Una gran ventaja de la lógica borrosa es que puede usarse para representar tanto la incertidumbre como la imprecisión. Aunque hay que dejar claro que la incertidumbre esta relacionada con la creencia que tenemos acerca de la verdad o la falsedad de una proposición y por lo tanto estaremos representando grados de creencias, mientras que la imprecisión esta relacionada con el significado de una proposición y por lo tanto estaremos representado grados de adecuación.

# Capítulo 2

# Conjuntos borrosos

En este capítulo primero explicaremos qué son los conjuntos borrosos, de dónde surgieron y cómo extienden a los conjuntos clásicos. A continuación expondremos los distintos usos de los conjuntos borrosos y las distintas interpretaciones del grado de pertenencia a un conjunto borroso.

Plantearemos las distintas técnicas utilizadas para construir la función de pertenencia que caracteriza a un conjunto borroso y propondremos una relación entre técnicas e interpretaciones.

Al igual que en lógica clásica combinamos los conjuntos para obtener conjuntos más complejos, en lógica borrosa debemos combinar los conjuntos borrosos obtenidos para poder expresar proposiciones compuestas.

Por último veremos como podemos usar los conjuntos borrosos para representar conocimiento impreciso.

## 2.1 Conjuntos clásicos

Sea A un subconjunto de X que lo divide en 2 los que pertenecen a A y los que pertenecen a su complementario, representado del siguiente modo:

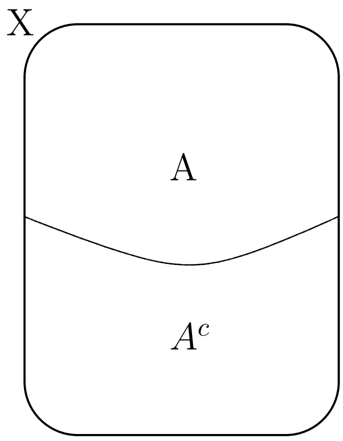


Figura 2.1: A subconjunto de X

Este subconjunto A de X puede caracterizarse usando una función $\mu_A : X \to \{0,1\}$ definida del siguiente modo:

$$\mu_A(x) = 1, \quad \text{si la afirmación “x} \in \text{A”es verdadera}$$
$$\mu_A(x) = 0, \quad \text{si la afirmación “x} \in \text{A”es falsa}$$

entonces:

$$A \subset B, \text{ si y sólo si } \mu_A \leq \mu_B. \text{ Es decir, } \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \forall x \in X$$
$$A = B, \text{ si y sólo si } \mu_A = \mu_B. \text{ Es decir, } \mu_A(x) = \mu_B(x) \forall x \in X$$

Por lo tanto, la aplicación $M : \mathbb{P}(X) \to \{0,1\}^X$, donde $\{0,1\}^X = \{f; f : X \to \{0,1\}\}$, definida como $M(A) = \mu_A$, es una función biyectiva entre $\mathbb{P}(X)$ y $\{0,1\}^X$, que transforma el orden parcial $\subset$ en el $\leq$ de $\{0,1\}^X$ y la igualdad de $\mathbb{P}(X)$ en la de $\{0,1\}^X$. Por tanto las estructuras ordenadas $(\mathbb{P}(X), \subset)$ y $(\{0,1\}^X, \leq)$ son isomórficas.

Es decir, la estructura $(\mathbb{P}(X), \subset, \cup, \cap, ^c)$ (que es un álgebra de Boole) de la que dotamos a la teoría los subconjuntos clásicos, es isomórfica a la estructura reticular $(\{0,1\}^X, \leq, =, \vee, \wedge, \neg)$ (que por tanto, también es un álgebra de Boole) de la que podemos dotar a las funciones $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ con las definiciones:

$$\begin{array}{ccl} f_1 \leq f_2 & sii & (\forall x \in X : f_1(x) \leq f_2(x)) \\ f_1 = f_2 & sii & (\forall x \in X : f_1(x) = f_2(x)) \\ (f_1 \vee f_2)(x) & = & Max\{f_1(x), f_2(x)\}, \forall x \in X \\ (f_1 \wedge f_2)(x) & = & Min\{f_1(x), f_2(x)\}, \forall x \in X \\ (\neg f)(x) & = & 1 - f(x), \forall x \in X \end{array}$$

Por tanto, desde el punto de vista matemático no hay ninguna diferencia entre la teoría de los subconjuntos de un conjunto X y las funciones entre X y {0,1}, si estas últimas están dotadas de la anterior estructura reticular, proveniente del orden puntual entre funciones. Matemáticamente, hablar de la teoría de subconjuntos de X y hablar de la teoría de las funciones entre X y {0,1} ordenadas puntualmente es lo mismo. Esto no ocurre con la teoría de la probabilidad que, en general, no extiende la teoría de los conjuntos clásica.

De aquí que una posible extensión de la teoría de los subconjuntos sea la extensión de las funciones que caracterizan a los subconjuntos a funciones continuas $f : X \rightarrow [0, 1]$, permitiendo caracterizar entonces a conjuntos borrosos.

## 2.2 Origen de los conjuntos borrosos

La noción de conjunto borroso la introdujo Zadeh en 1965 en su artículo "Fuzzy Sets"[Zad65] para intentar tratar problemas en los cuales la imprecisión tiene un papel fundamental. Esta imprecisión surge de la ausencia de criterios precisos para clasificar los objetos dentro de una clase, es decir, los objetos no pertenecen a una clase con grado 1(están en la clase) o con grado 0(no están en la clase), si no que pertenecen con un cierto grado 'r' (sólo están dentro de la clase en cierto grado).

En dicho artículo definió un conjunto borroso de la siguiente manera:

> "Un conjunto borroso es una clase de objetos con un grado de pertenencia continuo. Tal conjunto está caracterizado por una función de pertenencia que le asigna a cada objeto un grado de pertenencia dentro del rango [0,1]."

Desde el principio se le exigió al concepto de conjunto borroso que además de servir para representar la imprecisión también generalizara el concepto de conjunto clásico, ya que en el lenguaje también encontraremos predicados precisos.

Desde este punto de vista, un conjunto clásico se considera un caso particular de un conjunto borroso. Un conjunto clásico podría definirse, usando la definición de conjunto borroso como un concepto "límite":

> "Un conjunto clásico es un conjunto borroso en el cual el grado de pertenencia de los objetos a la clase que representa el conjunto es discontinuo, es decir, o pertenecen a la clase o no pertenecen. Dicho conjunto vendrá caracterizado por una función de pertenencia que le asigne a cada objeto que pertenezca a la clase un grado 1 y a cada objeto que no pertenezca a la clase un grado 0."

Debido al uso de los conjuntos borrosos en distintos campos desde su aparición, han surgido diversas interpretaciones sobre lo que representa un conjunto borroso, distintas técnicas para hallar su función de pertenencia y diversos modos para manejar los conjuntos borrosos hallados. En los siguientes puntos resumiremos estas cuestiones.

## 2.3 ¿Qué puede representar un conjunto borroso?

Actualmente hay gran variedad de interpretaciones de lo que representa un conjunto borroso y aunque no son excluyentes, representan los distintos usos que se hacen de los conjuntos borrosos.

El qué represente un conjunto borroso depende de en qué nos hayamos fijado para construirlo y de cómo lo hayamos construido. Es decir, la interpretación que hacemos del grado de pertenencia a un conjunto borroso y la técnica empleada para su estimación deben ser adecuados, para obtener conjuntos borrosos coherentes con lo que representan.

Empezaremos describiendo las distintas interpretaciones que se hacen del grado de pertenencia a un conjunto borroso.

Dada la afirmación "x es P"considerada como que $x \underset{r}{\in} \underset{\sim}{P}$, siendo 'r' el grado de pertenencia de un elemento 'x' a un conjunto borroso $\underset{\sim}{P}$, definido en el universo de discurso 'X', podemos encontrar tres interpretaciones de este grado en [DOP00]:

- Grado de similaridad: es la interpretación más antigua. Representa el grado de proximidad de cada objeto a los prototipos de $\underset{\sim}{P}$. Problema:"¿A todos?, ¿A cada uno?"

- Grado de preferencia: $\underset{\sim}{P}$ representa un conjunto de objetos con distintos grados de preferencia (o representa los valores posibles de una variable Y) y 'r' representa la intensidad de la preferencia a favor de un objeto, (o la factibilidad de seleccionar 'x' como el valor de Y). Representan, por tanto, criterios o restricciones flexibles.

- Grado de incertidumbre: el grado de pertenencia puede verse como el grado de credibilidad de que el parámetro Y tenga un valor 'x', dado que todo lo que conocemos de él es que "Y es P". Siendo los posibles valores excluyentes entre sí.

En [BT00] se proponen cinco maneras, no necesariamente excluyentes entre sí, de ver del grado de pertenencia (Ejemplo $\mu_{Alto}(Juan) = 0.7$):

- Visto como probabilidad: La imprecisión se produce por errores en la medida, información incompleta o contradicciones. Representa el tanto por ciento de la población consultada que consideran que "x es P", es decir, la probabilidad de que elegida una persona al azar responda que considera que "x es P". Ej: "El 70% de la población considera que Juan es alto".

- Visto como conjunto aleatorio: Representa el tanto por ciento de la población que considerando un intervalo como representación de P, el valor de x cae dentro del intervalo. Ej: "El 70% de la población describen Alto como un intervalo que contiene a Juan".

- Visto como similaridad: Mide el grado de similaridad de cada objeto con un prototipo del conjunto. Ej: "El grado de similaridad entre Juan y el prototipo de Alto es 0.7".

- Visto como creencia: Mide la creencia subjetiva (pero no irracional) que se tiene acerca de una sentencia. Ej: "La creencia que se tiene de la afirmación Juan es Alto es 0.7"

- Visto como medida: Considera el grado de pertenencia como la medida en que el objeto se adecúa al conjunto. Para ello se basa en el orden que entre los objetos genera el predicado P y asigna a cada objeto una medida que cumpla ese orden y represente el grado de adecuación. Ej: "Al comparar Juan con los otros objetos este es más Alto que algunos y su medida de encaje con Alto es 0.7"

Dado que la interpretación es externa, podríamos estar tentados de cambiar de interpretación cada vez que lo necesitáramos para adecuarla a nuestras necesidades. Pero esto sería como si a una palabra le cambiásemos el significado: podríamos seguir usándola en el lenguaje e incluso construir frases gramaticalmente correctas, pero el resto de hablantes no entenderían el significado de las frases o entenderían otro significado.

## 2.4 ¿Cómo hallar la función de pertenencia de un conjunto borroso?

La forma más utilizada para representar el grado de pertenencia a un conjunto borroso, teniendo en cuenta que este es único, es usando una función de pertenencia; interpretando la función de pertenencia $\mu_P(x)$ del siguiente modo:

$$x \underset{r}{\in} \underset{\sim}{P} \Leftrightarrow \mu_P(x) = r$$

Otras formas usadas para representar un conjunto borroso son: mediante $\alpha$-cortes, mediante combinaciones convexas de conjuntos y mediante puntos en un hipercubo.(para más información consultar [DOP00] pag. 44-47).

Para hallar los valores de la función de pertenencia existen también distintos tipos de técnicas. En [BT00] se enumeran las siguientes:

1. **Votación.** Basado en el punto de vista de que la imprecisión proviene de los desacuerdos entre las personas. Por tanto se pregunta a un grupo de individuos

¿Estas de acuerdo con que x es P?. Las respuestas son votadas y una media es tomada como el valor de la función de pertenencia $\mu_P(x)$. Esta técnica presupone la posibilidad de repetir muchas veces la preguntas.

2. **Estimación directa.** Este método toma como punto de vista el de que la imprecisión proviene de la vaguedad subjetiva de cada individuo. Se le pide, por tanto, a un persona que estime el grado de adecuación de un objeto al conjunto: "¿Cómo de P es x?". Las preguntas se repiten para comprobar que las respuestas son consistentes. Esta técnica presupone la capacidad de las personas para evaluar este grado.

3. **Estimación inversa.** Toma el mismo punto de vista que el anterior, pero ahora se le pregunta a la persona por un objeto que tenga un cierto grado de adecuación con el conjunto. "¿Qué x es P en grado r?". Esta técnica presupone la capacidad de las personas para interpretar este grado.

4. **Estimación por intervalos.** En esta técnica se ve a la función de pertenencia desde un punto de vista posibilista. Así que, se le pregunta al sujeto por un intervalo que describa el valor de la propiedad de un objeto. "¿Entre qué valores están contenidos los valores de P de x?"Este método tiene la ventaja respecto de los anteriores de no tener una respuesta precisa.

5. **Ejemplificación.** Se propone un ejemplo de función de pertenencia y se pide su modificación para adecuarse al conjunto. O se pide que se clasifique un conjunto de objetos de acuerdo a una propiedad."¿x es P,Muy P, aP,Muy aP?". Esta técnica presupone que tenemos un perfil o una aproximación de la función que queremos construir.

6. **Comparación de pares.** Compara los objetos de dos en dos, los ordena y cuantifica la diferencia entre ellos."¿Cuál es más P x o y?" "¿Y cuánto es más P x que y?". Pudiendo ser la respuesta numérica o cualitativa (más, mucho más, muchísimo más). Esta técnica presupone la capacidad de comparar los objetos y cuantificar la diferencia entre ellos.

7. **Clustering borroso.** Esta técnica intenta clasificar automáticamente los objetos en conjuntos borrosos usando para ello una técnica de clustering (se basa en la distancia entre los objetos). Los objetos cercanos entre sí se incluyen en un cluster intentando que los clusters estén alejados entre sí. Esta técnica presupone la existencia de una distancia entre los objetos y los clusters, además de la disponibilidad de gran cantidad de información.

8. **Técnicas neuronales.** Generan la función de pertenencia mediante una red neuronal que se entrena con un conjunto de datos.

Los defensores de cada técnica proponen su uso para cualquier interpretación del grado de pertenencia. Pero, como dijimos en el apartado anterior, para que la función de pertenencia del conjunto borroso obtenida sea coherente con la interpretación que estamos haciendo del grado de pertenencia, es necesario que elijamos la técnica adecuada para dicha interpretación. Este emparejamiento lo hacemos basándonos en que concuerden las preguntas que realizan cada técnica y las repuestas que queremos obtener según la interpretación.

A continuación proponemos una relación de las técnicas adecuadas para las 3 interpretaciones de [DOP00]:

- Para la interpretación del grado de pertenencia como grado de similaridad las técnicas más adecuadas son: la estimación inversa (para encontrar los prototipos) y la estimación directa (para evaluar el grado de similitud con los prototipos).
- Para la interpretación del grado de pertenencia como grado de preferencia la técnica más adecuada es: la estimación directa (preguntando por el grado de preferencia).
- Para la interpretación del grado de pertenencia como grado de incertidumbre la técnica más adecuada es: la estimación directa (preguntando por el grado de creencia).

Y a continuación una relación de las técnicas más adecuadas para las 3 interpretaciones de [BT00] que son distintas de las anteriores:

- Si vemos el grado de pertenencia como una probabilidad la técnica más adecuada es: la votación (la probabilidad se calcula a partir respuestas obtenidas).
- Si vemos el grado de pertenencia como un conjunto aleatorio la técnica más adecuada es: la estimación por intervalos (los intervalos del conjunto aleatorio que contienen el grado se obtienen de las respuestas).
- Si vemos el grado de pertenencia como una medida la técnica más adecuada es: la comparación de pares (obtenemos la medida de la comparación entre objetos y la cuantificación de esa comparación) complementada con interpolación y su comprobación posterior.

La técnica de ejemplificación sería adecuada para comprobar que la función obtenida mediante alguna de las técnicas propuestas se ajusta al uso del predicado. Y las técnicas de clustering y de redes neuronales serían útiles si disponemos de una cantidad adecuada de datos sobre el grado de pertenencia.

## 2.5 ¿Cómo combinar conjuntos borrosos?

Teniendo en cuenta que además de representar sentencias simples del tipo "x es P"también queremos representar sentencias compuestas del tipo "x es P & Q", del tipo "x es P está relacionado con x es Q"y del tipo "x es P está relacionado con y es Q". Debemos ser capaces de combinar los conjuntos borrosos $\underset{\sim}{P}$ y $\underset{\sim}{Q}$ para obtener el conjunto borroso $\underset{\sim}{P\&Q}$ o representar la relación existente entre los conjuntos borrosos $\underset{\sim}{P}$ y $\underset{\sim}{Q}$ mediante una relación $R(\underset{\sim}{P},\underset{\sim}{Q})$ y representar la relación existente entre 'x' e 'y' y la relación entre sus predicados P y Q mediante $R(x,y)$ y $R(\underset{\sim}{P}(x),\underset{\sim}{Q}(y))$.

Para llevar a cabo esta combinación, se vio la necesidad de dotar, en cada caso, a los conjuntos borrosos de una teoría que especifique cómo combinar conjuntos borrosos simples en conjuntos borrosos compuestos y donde se puedan representar las relaciones entre predicados. Estas teorías las describiremos en detalle en el capítulo siguiente.

## 2.6 Uso de conjuntos borrosos para representar conocimiento impreciso

Una de las motivaciones principales de la lógica borrosa ha sido y es, representar conocimiento. Y para ello, uno de los componentes básicos es representar el significado de los predicados del lenguaje natural, que son los que usamos los humanos para expresar nuestro conocimiento. La importancia de la lógica borrosa en este cometido, lo pone de manifiesto Zadeh en [Zad92]:

> "Los métodos convencionales para la representación del conocimiento carecen de medios para la representación del significado de los conceptos borrosos."

> "Nótese que la mayoría de los predicados en lenguaje natural son más frecuentemente borrosos que nítidos."

Un ejemplo de la imposibilidad de usar conjuntos clásicos para representar conceptos imprecisos es:

> Sea el universo de discurso $X = [0, 10]$, el predicado nítido P="menor que 3"y el predicado impreciso Q="pequeño".
>
> Para el predicado P existe su extensión clásica $\underset{\sim}{P} = \{x \in X :$ "x es menor que 3"es verdadera$\}$ y su complementario $\underset{\sim}{P}^c = \{x \in X :$ "x es menor que 3"es falsa$\}$ que dividen el conjunto X en dos subconjuntos.
>
> Pero para el predicado Q no existe su extensión clásica $\underset{\sim}{Q} = \{x \in X :$ "x es pequeño"es verdadera$\}$ y su complementario $\underset{\sim}{Q}^c = \{x \in X :$ "x es pequeño"es falsa$\}$, ya que si fuera así se tendría que si $0 \in \underset{\sim}{Q}$ y dado que si "x es pequeño"entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que también "x + $\varepsilon$ es pequeño", un prueba matemática muestra que todos los números de $[0, 10]$ son pequeños, lo cual es inadmisible. No pudiendo obtener para predicados imprecisos un conjunto clásico que los represente, será necesario utilizar "conjuntos borrosos".

Esto quiere decir que si queremos representar conocimiento impreciso, que expresamos mediante predicados imprecisos, necesitamos una herramienta que recoja esta imprecisión, de tal manera que nos permita trabajar con ella. Nosotros utilizaremos los conjuntos borrosos para representar el significado de predicados imprecisos de las proposiciones que usamos para expresar nuestros conocimientos.

De la gran variedad de proposiciones que usamos en lenguaje para expresar conocimientos, nos vamos a centrar en los siguientes tipos:

- Enunciativas:
  - Simples: Involucran a un predicado. Pueden ser precisas o imprecisas. Ej: Juan mide 180cms. Juan es alto. Luis mide 150cms. Luis es bajo.
  - Derivadas: Involucran a un predicado modificado. Sólo pueden ser imprecisas. Ej: Pedro es muy alto. Luis no es muy alto.

  - Compuestas: Involucran dos predicados conectados, pero pertenecientes al mismo concepto. Ej: Juan no es ni alto ni bajo.

- Relacionales:
  - Simples: Plasman una relación entre objetos en base a una característica común, sólo involucran a un concepto. Ej: Juan es más alto que Luis. Juan y Pedro son igual de altos.
  - Compuestas: Plasman una relación entre varias características que comparten los objetos, involucran a varios conceptos. Ej: Si Juan es alto entonces es grande.
  - Complejas: Plasman una relación existente entre varios objetos, involucran a varios conceptos y a varios conjuntos de objetos. Ej: Si Juan es joven entonces Pedro, su hijo, es muy joven. Si las sillas son altas entonces la mesa es alta.

Todas estas proposiciones nos van a permitir expresar una variedad de conocimientos suficientemente amplia para nuestros propósitos.

# Capítulo 3

# Teorías actuales de conjuntos borrosos

A partir de la idea original de Zadeh surgieron las teorías de conjuntos borrosos, que contenían operadores para manejar los conjuntos borrosos. Estos operadores permitían obtener conjuntos borrosos compuestos, combinando conjuntos borrosos simples. Estas teorías siempre generalizan la teoría de conjuntos clásica, que contiene los operadores de negación, conjunción y disyunción, y la relación de implicación. Por lo tanto una teoría de conjuntos borrosos debe contener operadores que generalicen la negación, conjunción, disyunción y la implicación clásicas.

Para poder llegar a esta generalización se usa la hipótesis de funcionalidad, que supone que los operadores de negación, conjunción, disyunción e implicación son funcionalmente expresables.

Primero presentaremos cómo fueron evolucionando las teorías de conjuntos borrosos hasta llegar a las teorías estándar, a las que dedicaré más atención. Y cómo recientemente se han conseguido generalizar las teorías estándar mediante la propuesta axiomática de conjunto impreciso.

## 3.1 Evolución de las teorías de conjuntos borrosos

En su artículo de 1965 Zadeh además de introducir el concepto de conjunto borroso también propuso como extender la inclusión, la conjunción, disyunción y negación clásicas a los conjuntos borrosos.

- Para la inclusión de conjuntos borrosos propuso el orden puntual entre funciones.

$$\mu \leq \sigma \leftrightarrow \mu(x) \leq \sigma(x),\ \forall x \in X$$

  Con ello, los conjuntos borrosos se identifican así:

$$\mu = \sigma \leftrightarrow \mu(x) = \sigma(x),\ \forall x \in X$$

- Para la conjunción de conjuntos borrosos propuso utilizar el mínimo.

$$(\mu \wedge \sigma)(x) = Min(\mu(x), \sigma(x)),\ \forall x \in X$$

- Para la disyunción de conjuntos borrosos propuso utilizar el máximo.

$$(\mu \vee \sigma)(x) = Max(\mu(x), \sigma(x)),\ \forall x \in X$$

- Para hallar la negación de un predicado propuso utilizar el complemento a 1.

$$\mu'(x) = 1 - \mu(x) = (1 - id) \circ \mu(x)$$

Esta elección generalizaba inmediatamente el caso clásico, al extender los operadores retículo $(\{0,1\}^X, \leq, =, \vee, \wedge, \neg)$ a operadores continuos $([0,1]^X, \leq, =, \vee, \wedge, \neg)$.

Más tarde hubo algunos intentos para justificar la elección de Min y Max entre ellos el artículo de Bellman-Giertz de 1973 [BG73].

Aparte de la propuesta de Zadeh, se comenzaron a usar también otras funciones:

- Para la conjunción $\wedge$:
  el producto: $(\mu \wedge \sigma)(x) = (\mu(x) * \sigma(x)),\ \forall x \in X$
  y la operación de Łukasiewicz: $(\mu \wedge \sigma)(x) = Max(0, \mu(x) + \sigma(x) - 1),\ \forall x \in X$

- Para la disyunción $\vee$:
  la suma-producto:$(\mu \vee \sigma)(x) = \mu(x) + \sigma(x) - (\mu(x) * \sigma(x)),\ \forall x \in X$
  y la suma acotada:$(\mu \vee \sigma)(x) = Min(1, \mu(x) + \sigma(x)),\ \forall x \in X$

- Para la negación:
  las negaciones de Sugeno: $\mu'(x) = \frac{1-\mu(x)}{1+\lambda\mu(x)}, \lambda > -1$.

Y ello provocó que se empezaran a plantear las siguientes cuestiones:

1. ¿La conjunción y la disyunción son siempre funcionalmente expresables?

2. ¿La negación es siempre funcionalmente expresable?

3. ¿Cómo son las funciones $N : [0,1] \to [0,1]$ tales que $\mu' = N \circ \mu$?

4. ¿La conjunción y la disyunción tienen que ser siempre distributivos?

Y aunque todas estas preguntas dentro de la lógica clásica nunca se plantearon por no ser necesarias (ya que existe una única teoría reticular, un álgebra de Boole), dentro de la lógica borrosa se hicieron necesarias, ya que su intención es reflejar el lenguaje natural, donde el 'y', el 'o' y el 'no' despeñan gran variedad de funciones no siempre con el mismo significado ni propiedades.

Se necesitaban operadores & que cumpliesen $a\&b \leq a \wedge b$ ó $a \vee b \leq a\&b$ e incluso $a \wedge b \leq a\&b \leq a \vee b$, dando cabida por tanto a otros operadores más flexibles, adecuados para el 'y', el 'o' y el 'no' del lenguaje natural. Por lo tanto parece adecuado relajar las restricciones (Min,Max,1-x) para dar cabida a nuevos operadores.

Respecto a las preguntas de si son funcionalmente expresables, se consideró la respuesta afirmativa ya que era un caso bastante general y suficiente para muchos propósitos. Es decir:

- El grado de "x es P y Q"$\equiv \mu_{PyQ}(x) = T(\mu_P(x), \mu_Q(x))$.

- El grado de "x es P o Q"$\equiv \mu_{PoQ}(x) = S(\mu_P(x), \mu_Q(x))$.

- El grado de "x es no P"$\equiv \mu_{\neg P}(x) = N(\mu_P(x))$.

### 3.1.1 Introducción de las negaciones fuertes

Para responder a la tercera pregunta y teniendo en cuenta que se quiere generalizar la negación, parece conveniente recordar las propiedades que se aceptan de la negación clásica (recogidas de [TC98]):

- Si “a es P”es falsa, entonces “a es no P”es verdadera.

- Si “a es P”es verdadera, entonces “a es no P”es falsa.

- “a es no no P”equivale a “a es P”.

Con estas propiedades, una función $N : [0,1] \to [0,1]$ tal que $\mu'(x) = N(\mu(x))$, deberá verificar (ver [TC98]):

a) $N(0) = 1$, $N(1) = 0$

b) Si $x \leq y$, entonces $N(y) \leq N(x)$

c) $N(N(x)) = x, \forall x \in [0,1]$

La condición b) se exige por coherencia, ya que si la verdad de una proposición aumenta es natural que disminuya su falsedad y viceversa.

Las funciones que verifican estas tres propiedades reciben el nombre de negaciones fuertes, y fueron completamente caracterizadas por Trillas en [Tri79] por medio de la expresión:

$$N(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)), \forall x \in [0,1]$$

con cualquier función $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ que sea un automorfismo de orden en $([0,1], \leq)$.

Algunos ejemplos de negaciones fuertes son:

- Complemento a 1:
$$N(x) = 1 - x$$

- Sugeno: $\lambda > -1$
$$N_\lambda(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x}$$

- Yager: $\alpha > 0$
$$N^\alpha(x) = (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

- Sugeno-Yager: $\lambda > -1, \alpha > 0$
$$N_\lambda^\alpha(x) = \left(\frac{1-x^\alpha}{1+\lambda x^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Todas ellas tienen como caso particular al complemento a 1.

### 3.1.2 Introducción de las t-normas y t-conormas

Para responder a la cuarta pregunta, primero plantearemos las propiedades que deben verificar T y S para que se garanticen las leyes que usualmente se sobrentienden para la conjunción y la disyunción en la lógica clásica (para cualesquiera r, s, u $\in [0,1]$, ver [TC98]):

| PROPIEDAD | Nº | CONJUNCIÓN ($T$) | DISYUNCIÓN ($S$) |
|---|---|---|---|
| Asociativa | 1 | $T(r,T(s,u)) = T(T(r,s),u)$ | $S(r,S(s,u)) = S(S(r,s),u)$ |
| Conmutativa | 2 | $T(r,s) = T(s,r)$ | $S(r,s) = S(s,r)$ |
| Idempotencia | 3 | $T(r,r) = r$ | $S(r,r) = r$ |
| Distributivas | 4 | $T(r,S(s,u)) = S(T(r,s),T(r,u))$ | $S(r,T(s,u)) = T(S(r,s),S(r,u))$ |
| Dualidad | 5 | $N(T(r,s)) = S(N(r),N(s))$ | $N(S(r,s)) = T(N(r),N(s))$ |
| No-Contradicción | 6 | $T(r,N(r)) = 0$ | $\ldots$ |
| Tercero-Excluido | 7 | $\ldots$ | $S(r,N(r)) = 1$ |
| Neutralidad | 8 | $T(r,1) = r$ | $S(r,0) = r$ |
| Absorción | 9 | $T(r,0) = 0$ | $S(r,1) = 1$ |
| Mantenimiento (crecimiento) | 10 | Si $r \leq s$, es $T(r,u) \leq T(s,u)$ | Si $r \leq s$ es $S(r,u) \leq S(s,u)$ |

De la primera de la propiedad que se dudó fue la distributividad, porque las funciones que se estaban utilizando, distintas de Min-Max, para la conjunción y disyunción, no conservaban esa propiedad, pero conservaban otras.

En 1983 aparecen los primeros artículos de Trillas, Alsina y Valverde sobre conectivos lógicos no-distributivos [ATV83], introduciendo en ellos las t-normas y las t-conormas. Las propiedades que debe verificar una función para ser una t-norma o una t-conorma, las explicaremos en los puntos siguientes. Estas funciones se introdujeron porque verificaban las propiedades {1,2,8,9,10} que son las más usuales, de entre las anteriores, que suelen requerirse.

**Definición de t-norma:**

Una función $T : [0,1]x[0,1] \rightarrow [0,1]$ es una t-norma sii $\forall x, y, z \in [0,1]$ verifica:

1. $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$.

2. $T(x,y) = T(x,y)$.

3. $T(x,1) = x$.

4. $T(x,0) = 0$.

5. Si $x \leq y$ entonces $T(x,z) \leq T(y,z)$.

Algunos ejemplos de t-normas son:

- Producto drástico:

$$Z(x,y) = \begin{cases} x, & \text{si } y = 1 \\ y, & \text{si } x = 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

  que es discontinua, y es la menor de todas las t-normas.

- Mínimo: $T(x,y) = Min(x,y)$ que es la mayor de todas las t-normas.

- Producto: $Prod(x,y) = x \cdot y$.

- Operador de Łukasiewicz: $W(x,y) = Max(0, x + y - 1)$.

Estas 4 t-normas están relacionadas por las siguientes desigualdades:

$$Z(x,y) \leq W(x,y) \leq Prod(x,y) \leq Min(x,y), \quad \forall x, y \in [0,1]$$

Las t-normas discontinuas no han podido ser clasificadas, pero nos interesan las t-normas continuas por no presentar saltos. Además estas se clasifican en 4 familias; esto es, toda t-norma continua pertenece a una de estas 4 familias.

Una t-norma $T_1$ pertenece a la familia $\mathcal{F}(T)$ de $T$ sii $T_1 = \varphi^{-1} \circ T \circ (\varphi \times \varphi)$, con cualquier función $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ que sea un automorfismo de orden en $([0,1], \leq)$.

Las 4 familias de t-normas continuas son las siguientes:

- $T \in \mathcal{F}(Min) \Leftrightarrow T = Min$, el mínimo la única t-norma que pertenece a su familia, y es la única idempotente.
- $T \in \mathcal{F}(Prod)$, pertenecen a la familia del producto y no tienen divisores de cero.
- $T \in \mathcal{F}(W)$, pertenecen a la familia de la operación de Łukasiewicz y tienen divisores de cero.
- Sumas ordinales, son una mezcla de las anteriores y tienen la forma:

$$T(x,y) = \begin{cases} T_i(x,y), & \text{si (x,y)} \in [a_i, b_i]^2 \\ Min(x,y), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde $[a_i, b_i]^2$ es partición del intervalo $[0,1]^2$.

**Definición de t-conorma:**

Una función $S : [0,1]x[0,1] \rightarrow [0,1]$ es una t-conorma sii $\forall x, y, z \in [0,1]$ verifica:

1. $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z)$.
2. $S(x,y) = S(x,y)$.
3. $S(x,0) = x$.
4. $S(x,1) = 1$.
5. Si $x \leq y$ entonces $S(x,z) \leq S(y,z)$.

Algunos ejemplos de t-conormas son:

- Suma drástica:

$$Z^*(x,y) = \begin{cases} x, & \text{si } y = 0 \\ y, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

  que es discontinua, y es la mayor de todas las t-conormas.

- Máximo: $S(x,y) = Max(x,y)$ que es la menor de todas las t-conormas.
- Suma - Producto: $S(x,y) = x + y - x \cdot y$.
- Operación dual de Łukasiewicz: $W^*(x,y) = Min(1, x+y)$.

Estas 4 t-conormas están relacionadas por las siguientes desigualdades:

$$Max(x,y) \leq Sum - Prod(x,y) \leq W^*(x,y) \leq Z^*(x,y), \quad \forall x, y \in [0,1]$$

Las t-conormas discontinuas al igual que las t-normas discontinuas tampoco han podido ser clasificadas, pero nos interesan las t-conormas continuas por no presentar saltos, y además estas también han sido clasificadas en 4 familias; esto es, toda t-conorma continua pertenece a una de estas 4 familias.

Una t-conorma $S_1$ pertenece al familia $\mathcal{F}(S)$ de $S$ sii $S_1 = \varphi^{-1} \circ S \circ (\varphi \times \varphi)$, con cualquier función $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ que sea un automorfismo de orden en $([0,1], \leq)$.

Las 4 familias de t-conormas continuas son las siguientes:

- $S \in \mathcal{F}(Max) \Leftrightarrow S = Max$, el máximo es la única t-conorma que pertenece a su familia, y es la única idempotente.
- $S \in \mathcal{F}(Sum - Prod)$, pertenecen a la familia de la suma-producto y son estrictas.
- $S \in \mathcal{F}(W^*)$, pertenecen a la familia de la operación $W^*$ dual de Łukasiewicz y son no-estrictas.
- Sumas ordinales, son una mezcla de las anteriores y tienen la forma:

$$S(x,y) = \begin{cases} S_i(x,y), & \text{si (x,y)} \in [a_i, b_i]^2 \\ Max(x,y), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

  donde $[a_i, b_i]^2$ es una partición del intervalo $[0,1]^2$.

Las negaciones fuertes nos van a permitir relacionar las t-normas y las t-conormas del siguiente modo:

$$S_N(x,y) = N(T(N(x), N(y)))$$

donde $S_N$ es una t-conorma, la t-conorma N-dual de T. Se dice, simplemente, que S es "la dual"de T, si $N(x) = 1 - x$.

$$T_N(x,y) = N(S(N(x), N(y)))$$

donde $T_N$ es una t-norma, la t-norma N-dual de S. Se dice, simplemente, que T es "la dual"de S, si $N(x) = 1 - x$.

Por tanto diremos que T y S son N-duales si para todo x,y$\in [0,1]$ se cumple:

$$T(x,y) = N(S(N(x), N(y))) \text{ y que } S(x,y) = N(T(N(x), N(y)))$$

Y diremos que T y S son duales si para todo x,y$\in [0,1]$ se cumple:

$$T(x,y) = 1 - (S(1-x, 1-y)) \text{ y que } S(x,y) = 1 - (T(1-x, 1-y))$$

## 3.2 Teorías estándar

La introducción de las negaciones fuertes, las t-normas y las t-conormas llevó a trabajar en las denominadas teorías estándar; es decir, a usar el quinteto:

$$([0,1]^X, \leq, T, S, N)$$

En donde $[0,1]^X$ nos indica que los conjuntos borrosos de esta teoría son funciones del tipo $\mu : X \rightarrow [0,1]$, que usamos el orden puntual entre funciones para comparar conjuntos borrosos, es decir, $\mu \subseteq \sigma \leftrightarrow \mu(x) \leq \sigma(x), \forall x \in X$. En donde T es la t-norma elegida para la conjunción, S es la t-conorma elegida para la disyunción y N es la negación fuerte elegida como negación.

Dependiendo de las elecciones que hagamos conservaremos unas propiedades u otras de la lógica clásica, no pudiendo conservarlas todas en ningún caso. En la siguiente tabla mostraremos que elecciones hay que hacer para conservar cada propiedad:

| PROPIEDAD | $N^{\underline{o}}$ | CONJUNCIÓN ($T$) | DISYUNCIÓN ($S$) |
|---|---|---|---|
| Asociativa | 1 | Todas | Todas |
| Conmutativa | 2 | Todas | Todas |
| Idempotencia | 3 | Si $T = Min$ | Si $S = Max$ |
| Distributivas | 4 | Si $T = Min$ y $S = Max$ | Si $T = Min$ y $S = Max$ |
| Dualidad | 5 | Si T y S N-duales | Si T y S N-duales |
| No-Contradicción | 6 | Si $T = \varphi_1^{-1} \circ W \circ (\varphi_1 \circ \varphi_!)$ y $N \leq \varphi_1^{-1} \circ (1 - id) \circ \varphi_1$ | ... |
| Tercero-Excluido | 7 | ... | Si $S = \varphi_2^{-1} \circ W^* \circ (\varphi_2 \circ \varphi_2)$ y $\varphi_2^{-1} \circ (1 - id) \circ \varphi_2 \leq N$ |
| Neutralidad | 8 | Todas | Todas |
| Absorción | 9 | Todas | Todas |
| Mantenimiento | 10 | Todas | Todas |

Sólo con T=Min y S=Max (para cualquier N), obtenemos un álgebra de DeMorgan (un retículo distributivo con pseudo-complemento).

Si necesitamos No-Contradicción y Tercero-Excluido podremos elegir $T \in \mathcal{F}(W)$, $S \in \mathcal{F}(W^*)$S=$W^*$ y una negación adecuada $N(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$, pero teniendo en este caso divisores de cero para la conjunción y no-estricta la disyunción.

La que menos propiedades cumple de esta tabla son las t-normas $T \in \mathcal{F}(Prod)$ y las t-conormas $S \in \mathcal{F}(Sum - Prod)$, pero en este caso la conjunción no tiene divisores de cero y la disyunción es estricta. Esta elección tiene además la ventaja de ser interactiva, es decir, todas las variaciones en x,y influyen en T(x,y) y en S(x,y), fenómeno que no siempre ocurre para Min-Max o W-$W^*$.

La elección de la t-norma, t-conorma y N negación fuerte, debe estar guiada por la propiedades que queremos que mantengan o las propiedades que queremos que pierdan.

## 3.3 Problema interno de las teorías estándar

En la teoría clásica de conjuntos hay equivalencia entre "contradicción" e "incompatibilidad":

- Dos conjuntos A y B son contradictorios si $A \subset B'$.
- Dos conjuntos A y B son incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
- $A \subset B' \leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

Por tanto, hay un único conjunto "autocontradictorio", el conjunto vacío:

$$A \subset A' \leftrightarrow A \cap A = A = \emptyset$$

Sin embargo, en las teorías estándar $([0,1]^X, T, S, N)$, contradicción e incompatibilidad no coinciden, en ellas hay infinidad de conjuntos "autocontradictorios" además del conjunto vacío.

Trillas, Alsina y Jacas han propuesto en [TAJ99] una teoría en la que se consigue un álgebra de Boole, donde hay equivalencia entre contradicción e incompatibilidad y un único conjunto autocontradictorio, pero a costa de perder que T y S sean universal y funcionalmente expresables. Es decir, se cuestiona que la conjunción y la disyunción sean siempre funcionalmente expresables.

## 3.4 Propuesta axiomática de conjuntos imprecisos

Existen muchas teorías de conjuntos borrosos, pero faltan criterios para, por lo menos, clasificarlas. Para ello, faltaba un marco teórico que recoja lo que sabemos. Trillas y Alsina en [TA00b] proponen en este sentido una formulación axiomática del estilo a la que propuso Halmos para la teoría clásica conjuntos, con axiomas que sean las condiciones mínimas que comparten las teorías que conocemos y que permita separar tipos de teorías.

Trillas y Alsina utilizan la designación de "conjunto impreciso"para referirse a un concepto más amplio que conjunto borroso, es decir, un conjunto borroso es un conjunto impreciso que cumple unas ciertas condiciones. Una teoría de conjuntos borrosos será un tipo de teoría de conjuntos imprecisos.

Su propuesta axiomática de las teorías de conjuntos imprecisos es la siguiente:

Dado un conjunto $X = \{x, y, z, \ldots\}$ de símbolos primarios y un conjunto $E = \{\underset{r}{\in}; r \in J, \{0, 1\} \subset J \subset [0, 1]\}$ de símbolos relacionales, los elementos del conjunto $L = \{\mu, \sigma, \alpha, \omega, \ldots\}$ serán llamados conjuntos imprecisos si se satisfacen los siguientes axiomas:

*A1.* $(\forall x \in X)(\forall \mu \in L)(\exists !\, r \in J) : x \underset{r}{\in} \mu.$

*A2.* $\mu, \sigma \in L$ son idénticos $(\mu \equiv \sigma)$ Si:$(\forall x \in X)(\forall r \in J)\ x \underset{r}{\in} \mu \leftrightarrow x \underset{r}{\in} \sigma.$

*A3.* Existen $\alpha, \omega \in L : (\forall x \in X)\ x \underset{0}{\in} \alpha,\ x \underset{1}{\in} \omega.$

*A4.* $\mu$ está contenido en $\sigma(\mu \leq \sigma)$ Si:$(\forall x \in X)(\forall r, s \in J)\ x \underset{r}{\in} \mu, x \underset{s}{\in} \sigma \rightarrow r \leq s.$

*A5.* $(\forall \mu \in L)(\forall \sigma \in L)(\exists \mu + \sigma \in L) :$

$\mu + \sigma \equiv \sigma + \mu,\ \mu + \alpha \equiv \mu,\ \mu + \omega \equiv \omega,\ \mu \leq \mu + \sigma,\ \sigma \leq \mu + \sigma.$

*A6.* $(\forall \mu \in L)(\forall \sigma \in L)(\exists \mu * \sigma \in L) :$

$\mu * \sigma \equiv \sigma * \mu,\ \mu * \alpha \equiv \alpha,\ \mu * \omega \equiv \mu,\ \mu * \sigma \leq \mu,\ \mu * \sigma \leq \sigma.$

*A7.* $(\forall \mu \in L)(\exists - \mu \in L) : -(-\mu) \equiv \mu, \mu \leq \sigma \rightarrow -\sigma \leq \mu.$

Los cuatro primeros axiomas permiten identificar cada $\mu \in L$, con la función $\widetilde{\mu} : X \rightarrow J$ definida por $\widetilde{\mu}(x) = r \leftrightarrow x \underset{r}{\in} \mu$. E identificar $(L, \equiv, \leq)$ con $(J^X, =, \leq)$, siendo $=,\leq$ la igualdad y el orden puntuales. En adelante escribiremos $\mu$ en lugar de $\widetilde{\mu}$.

En toda teoría de conjuntos imprecisos se cumple (ver [TA00b]):

- La relación $\equiv$ es una relación de equivalencia.
- La relación $\leq$ es un orden parcial.
- Los conjuntos $\alpha$ y $\omega$ son únicos.
- Para todo conjunto $\mu \in L : \alpha \leq \mu \leq \omega$.
- $\mu \equiv \sigma$ sii $\mu \leq \sigma$ y $\sigma \leq \mu$.
- $\mu * \sigma \leq \mu \leq \mu + \sigma$ y $\mu * \sigma \leq \sigma \leq \mu + \sigma$.
- $(\mu * \sigma)(x) \leq Min(\mu(x), \sigma(x)) \leq Max(\mu(x), \sigma(x)) \leq (\mu + \sigma)(x)$.
- $-\alpha \equiv \omega$ y $-\omega \equiv \alpha$.
- $(\mu + \sigma)(x) = 0 \rightarrow \mu(x) = \sigma(x) = 0$.
- $(\mu * \sigma)(x) = 1 \rightarrow \mu(x) = \sigma(x) = 1$.

Cada $(X, E, L, \equiv, \leq, +, *, -, \alpha, \omega)$ es una teoría de conjuntos imprecisos, dentro de las cuales, las teorías estándar $([0,1]^X, T, S, N)$ son casos particulares.

Proponen los siguiente tipos de teorías:

- **Regulares:** Una teoría de conjuntos imprecisos será regular si cumple las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{rcl} (\mu + \sigma)(x) = 0 & \leftrightarrow & \mu(x) = \sigma(x) = 0 \\ (\mu * \sigma)(x) = 1 & \leftrightarrow & \mu(x) = \sigma(x) = 1 \\ (-\mu)(x) = 1 & \leftrightarrow & \mu(x) = 0 \end{array}$$

- **No regulares:** Una teoría será no regular si no cumple alguna de las propiedades anteriores.

- **Funcionalmente expresables (FE):** Una teoría es FE si:

$$(\forall \mu, \sigma \in L)(\exists F_{\mu\sigma} : J \times J \to J, G_{\mu\sigma} : J \times J \to J, N_{\mu} : J \to J) :$$

$$\begin{aligned} (\mu * \sigma)(x) &= F_{\mu\sigma}(\mu(x), \sigma(x)), \forall x \in X \\ (\mu + \sigma)(x) &= G_{\mu\sigma}(\mu(x), \sigma(x)), \forall x \in X \\ (-\mu)(x) &= N_{\mu}(\mu(x)), \forall x \in X \end{aligned}$$

- **Universal y funcionalmente expresables (UFE):** Una teoría es UFE si además de ser FE cumple:

$$(\forall \mu, \sigma \in L) F_{\mu\sigma} = F, G_{\mu\sigma} = G, N_{\mu} = N$$

- **No funcionalmente expresables.**

En ese artículo además demostraron que todas las teorías UFE son regulares, aunque las hay FE y NO UFE que también son regulares, y que todas las teorías regulares contienen a un álgebra de Boole. Las teorías regulares son las que con seguridad extienden la teoría clásica de conjuntos.

De todo lo anterior se deduce que:

- Las teorías estándar son teorías UFE.

- Por ser UFE son regulares.

- Por ser regulares contienen un álgebra de Boole y extienden la teoría clásica de conjuntos.

- **Las teorías estándar extienden la teoría clásica de conjuntos.**

Las teorías estándar son teorías de conjuntos imprecisos a las se les exigen que cumplan las siguientes propiedades:

1. J=[0,1].

2. Que sea una teoría UFE.

3. Monotonía para +, $(\mu \leq \sigma, \delta \leq \gamma \to \mu + \delta \leq \sigma + \gamma)$ $(\forall \mu, \sigma, \delta, \gamma \in L)$.

4. Monotonía para *, $(\mu \leq \sigma, \delta \leq \gamma \rightarrow \mu * \delta \leq \sigma * \gamma)$ $(\forall \mu, \sigma, \delta, \gamma \in L)$.

5. Asociatividad para +, $(\mu + (\sigma + \delta) \equiv (\mu + \sigma) + \delta)$ $(\forall \mu, \sigma, \delta \in L)$.

6. Asociatividad para *, $(\mu * (\sigma * \delta) \equiv (\mu * \sigma) * \delta)$ $(\forall \mu, \sigma, \delta \in L)$.

En dicho artículo [TA00b] proponen un axioma de especificación que para el caso clásico se particularizaría en el axioma de especificación de Halmos y que relaciona un predicado del lenguaje con una teoría de conjuntos imprecisos. El axioma propuesto es el siguiente:

A8. (Especificación) Dados un conjunto X, un predicado P graduable en X y una función $T : \{\text{“}xesP\text{”}; x \in X\} \rightarrow [0, 1]$ interpretando que el grado(“x es P”)=T(“x es P), $\forall x \in X$, entonces existe una teoría de conjuntos imprecisos $(X, E, L, \equiv, \leq, +, *, -, \alpha, \omega)$ y $\mu \in L$, tales que:

$$x \underset{r}{\in} \mu \Leftrightarrow T(\text{“}xesP\text{”}) = r, \; \forall x \in X$$

## 3.5 Carencias actuales de las teorías propuestas para la representación de conocimiento impreciso

Usar una teoría estándar para representar conocimiento impreciso suponer restringir mucho los conocimientos representables, ya que sólo pueden usarse una conjunción, una disyunción y una negación para representar las proposiciones que expresan un conocimiento. Además la elección de tales operadores se hace en base a las propiedades que tienen, es decir, desde un punto de vista sintáctico y, sin embargo, ésta debería hacerse basándose en el significado que aportan, es decir, desde un punto de vista semántico, siendo este punto de vista más acorde a nuestra intención de representar significado.

Usar una teoría de conjuntos imprecisos para representar conocimiento impreciso sólo nos permite representar conceptos simples aislados, ya que el axioma de especificación dice que dado P existe un conjunto impreciso $\mu_P$ que lo representa dentro de una teoría $L_P$, pero ¿qué pasa cuando tenemos varios predicados P, Q, R,...? según el axioma cada uno tendrá su propia teoría $L_P$, $L_Q$, $L_R$,... pero no nos dice como se pueden relacionar ni como construir predicados compuestos a partir de ellas. Es decir, no sabemos que relación hay entre las teorías de los predicados simples $L_P$, $L_Q$ y las teorías de los predicados compuestos $LP \wedge Q$, $L_{P\vee Q}$, $L_{\neg P}$, ....

Usar una teoría estándar lleva a simplificar mucho nuestro problema pero usar una teoría de conjuntos imprecisos tan general tampoco permite aplicarla. Se requiere un término medio.

Este término medio podría ser usar múltiples teorías estándar que nos permitan gran variedad de interpretaciones de la conjunción, disyunción y negación acordes a los predicados implicados.

Pero aún nos seguirían faltando los modificadores y el antónimo necesarios para poder construir una variable lingüística (se definirá en próximo capítulo).

Por tanto debemos dotar a cada variable lingüística de un teoría estándar que nos permita obtener términos compuestos mediante conectivos, de un conjunto de modificadores que nos permitan obtener términos modificados y de un antónimo que nos permita hallar el antónimo del término principal. Esto nos permitirá representar las proposiciones enunciativas propuestas en el capítulo 2 sección 6.

Pero para poder representar la proposiciones relacionales propuestas en el capítulo 2 sección 6 necesitaremos además un conjunto de relaciones que nos permitan recoger la variedad de relaciones existentes entre los objetos.

Estas opciones son las que hemos usado en sistema C.W.0 para permitir representar gran variedad de variables lingüísticas, gran variedad de conectivos, gran variedad de modificadores, gran variedad de antónimos y gran variedad de relaciones existentes entre los objetos.

# Capítulo 4

# Representación del conocimiento impreciso: revisión parcial de las teorías de conjuntos borrosos

Después de recoger en el capítulo 2 las diversas interpretaciones de conjuntos borrosos plantearemos la interpretación que se utilizará para la representación del significado de proposiciones que expresan conocimiento.

Y después de exponer en el capítulo 3 las teorías actuales de conjuntos borrosos y las carencias que tienen para representar conocimientos imprecisos propondremos en este capítulo una representación de las relaciones entre conjuntos borrosos desde una punto de vista semántico. Para ello utilizaremos un conjunto de variables lingüísticas y un conjunto de relaciones entre predicados.

## 4.1 Nuevo concepto de conjunto borroso

Tomaremos como nuevo concepto de conjunto borroso el propuesto por Trillas y Alsina en [TA99], donde definen el conjunto borroso $\underset{\sim}{P}$ como "un modelo matemático del uso del predicado P en el universo de discurso X", intentando de ese modo recoger el significado de P (relativo a X).

Consideran que el significado de P en X, no es nada más que el uso de P en X, ya que los autores siguen el dictum de Wittgesntein [Wit81]:

"the meaning of a word is its use in language"

**Para hallar el modelo del uso de P proponen la siguientes condiciones:**

A cada "x es P" le asignamos un valor de un rango L que refleje la idoneidad de que x sea P, mediante $\mu_P(x) : X \to L$. Entonces, este rango L debe estar dotado de una estructura que represente el uso primario de P en X, es decir, de una relación binaria ($\preceq$) que traslade a L el orden impuesto por el uso primario, siendo este, el uso comparativo del predicado "x es menos P que y". A su vez la función $\mu_P(x)$ debe trasladar el uso secundario de P en X, siendo este, el uso extensional del predicado "¿Cuán P es x?".

Por tanto, el modelo del uso de P en X viene dado por la terna (L, $\preceq$, $\mu_P$), en donde se cumple que $\mu_P(x) \preceq \mu_P(y)$ si "x es menos P que y", siendo $\mu_P(x) =$Grado en que x es P y $\mu_P(y) =$Grado en que y es P.

**Como concepto general de medida proponen el siguiente:**

Si para comparar dos objetos, x, y, del conjunto S entre sí, nos fijamos en una característica k que presentan los objetos de S, para denotar el orden "x muestra la característica k menos de lo que la muestra y", usaremos $x \preceq_k y$.

Si suponemos que $\preceq_k$ es un preorden en S, entonces una función $m : S \to [0, 1]$ es una $\preceq_k$-medida para S si cumple:

1. $m(x_0) = 0$, si $x_0 \in S$ es minimal para $\preceq_k$.

2. $m(x_1) = 1$, si $x_1 \in S$ es maximal para $\preceq_k$.

3. Si $x \preceq_k y$, entonces $m(x) \leq m(y)$.

Esta definición dada por Trillas y Alsina generaliza el concepto de medida borrosa dado por M.Sugeno en [Sug74] y, por tanto, el concepto usual de medida aditiva.

**Definen que el uso de un predicado es $\mathbb{R}$-medible del siguiente modo:**

"Sea P un predicado, nombre de una propiedad, nombre común o etiqueta lingüística, del que conocemos su uso primario en un universo de discurso X. Diremos que el uso de P en X es $\mathbb{R}$-medible si existe un subconjunto S no vacío de $\mathbb{R}$ dotado con un orden $\preceq$, que traslade el orden que impone el uso primario de P en X, una función $\phi : X \to S$ y una $\preceq$-medida $m : S \to [0, 1]$ en S tal que:

1. $\phi(x) \preceq \phi(y)$ sii "x es menos P que y"para x,y en X.

2. El grado en que x es P = $m(\phi(x))$ para cada x en X.

La función $\phi$ se corresponde con una característica numérica en la que nos fijamos para usar P en X y, por supuesto, la función $\mu_P : X \to [0, 1]$, dada por $\mu_P(x) := m(\phi(x))$ para cada x en X, puede ser definida como la función de compatibilidad de P en X y, consecuentemente, como la función de pertenencia del conjunto borroso llamado P."

Siendo el modelo del uso de un predicado P en X, si este uso es $\mathbb{R}$-medible, la tupla ($\underset{\sim}{P}$, X, S, $\preceq$, $\phi$, $m$, $\mu_P$), donde $\underset{\sim}{P}$ es el conjunto borroso denotado como P, X es el universo de discurso, S depende de P y X, el preorden $\preceq$ se obtiene experimentalmente del uso primario de P en X, la función $\phi$ será elegida de acuerdo a la característica en que nos fijemos para usar P en X, la $\preceq$-medida $m$ debería obtenerse experimentalmente del uso secundario de P en X y la función de pertenencia se obtiene componiendo $m$ con $\phi$.

## 4.2 Representación de un predicado impreciso

Nosotros nos vamos a restringir a los predicados imprecisos cuyo uso sea $\mathbb{R}$-medible. Entonces para representar un predicado impreciso P necesitaremos construir el modelo de su uso en X, dado por ($\underset{\sim}{P}$, X, S, $\preceq$, $\phi$, $m$, $\mu_P$). Para ello seguiremos los siguientes pasos:

1. Seleccionaremos el universo de discurso X, es decir, el conjunto de objetos en los que nos vamos fijar para determinar el uso de P. Ej: Para el predicado alto nos vamos a fijar en un grupo de personas.

2. Elegiremos la característica numérica $\phi$ (de entre las que presentan los objetos de X) en la que nos fijamos para compararlos según el predicado P. Ej: Para el predicado alto aplicado a personas, nos fijamos en la altura de las personas para comparar si persona es más alta que otra.

3. Determinaremos el rango S de posibles valores que puede tomar la característica $\phi$ para los objetos de X. Ej: La altura de las personas esta comprendida entre 0cms. y 220cms.

4. Obtendremos el orden parcial $\preceq$ mediante experimentación con el uso primario de P en X. Ej: Si "x es menos alto que y" es porque "la altura de x es menor que la altura de y", entonces $\phi(x) \preceq \phi(y)$.

5. Propondremos una medida $m$ acorde con el orden parcial obtenido $\preceq$, es decir, $m(\phi(x_0)) = 0$ si $\phi(x_0)$ es minimal dentro de $\preceq$, $m(\phi(x_1)) = 1$ si $\phi(x_1)$ es maximal dentro de $\preceq$, creciente $m(\phi(x)) \leq m(\phi(y))$ para los tramos crecientes del orden, en los que $\phi(x) \preceq \phi(y)$ y decreciente $m(\phi(x)) \geq m(\phi(y))$ para los tramos decrecientes del orden, en los que $\phi(x) \succeq \phi(y)$. Debiendo contrastar esta medida propuesta mediante experimentación con el uso secundario de P y debiendo revisarla en caso de que haya divergencias. Ej: Si "la altura de x es menor que la altura de y"entonces $m(\phi(x)) \leq m(\phi(y))$.

6. Por último la función de pertenencia $\mu_P$ viene dada por la expresión: $\mu_P(x) := m(\phi(x))$. Ej: Si "la altura de x es 180cms."entonces $\mu_{Alto}(x) = m(Altura(x)) = m(180)$ que podría tomar el valor de $\mu_{Alto}(x) = m(180) = 0.9$.

Para llevar a cabo el paso 1 sólo debemos establecer el universo de discurso X en el que queremos conocer el uso del predicado P.

En el paso 2 elegiremos la característica que sirva para comparar los objetos en función de P, (si fuera necesario tener en cuenta varias características habría que agregarlas todas en una única que recogiera el uso de P en X).

Una vez determinada la característica que vamos a usar para comparar los objetos de X, resulta fácil determinar el rango S en el que sus toma valores dicha característica.

La función de pertenencia se obtiene fácilmente componiendo la característica elegida y la medida hallada.

A continuación explicaremos más detenidamente los pasos 4 y 5 por ser los más complejos de llevar a cabo.

Para desarrollar el paso 4 necesitaremos conocer el uso primario de P en X, es decir, sentencias comparativas del tipo "x es menos P que y", y en función de ellas, ordenaremos los valores de $\phi(x)$ y de $\phi(y)$, donde existirán un conjunto de valores que serán maximales y otro conjunto de valores que serán minimales, aunque también puede darse el caso en que no existan maximales o minimales pero que exista una tendencia asintótica hacia ellos. Asumiremos que existe un conjunto de maximales y otro de minimales, ya que asumimos que la amplitud de S es finita y, en todo caso, sólo presentaremos aplicaciones a funciones trapezoidales. Habrá que determinar por tanto los tramos maximales, minimales y los tramos crecientes y decrecientes que presente el orden parcial inducido por el predicado P, los cuales vendrán definidos por el intervalo de S que incluyen.

Un ejemplo de orden parcial para $S = [a, b]$ podría ser:

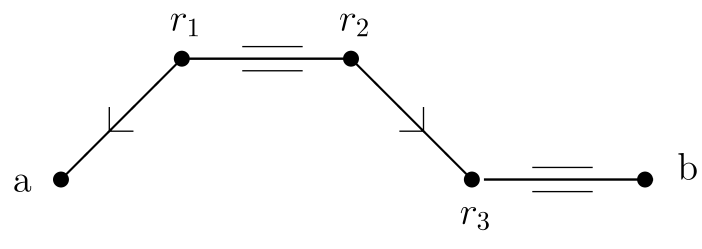


Figura 4.1: Ejemplo de orden parcial

Donde el orden parcial es creciente en el intervalo [a,$r_1$], maximal en el intervalo [$r_1$,$r_2$], decreciente en el intervalo [$r_2$,$r_3$] y minimal en el intervalo [$r_3$,b].

Una vez conseguido el orden parcial propondremos una medida que verifique ese orden para los valores de la característica. Teniendo en cuenta que probablemente haya infinitas medidas que lo verifiquen, habrá que ponerle ciertas restricciones, como por ejemplo: que sea lineal, cuadrática,..., o que se ajuste a unos valores ya conocidos.

En el ejemplo anterior, si suponemos que la función de medida es lineal su expresión es:

$$m(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{r_1-a} & \text{, si } x \in [a, r_1] \\ 1 & \text{, si } x \in [r_1, r_2] \\ \frac{r_3-x}{r_3-r_2} & \text{, si } x \in [r_2, r_3] \\ 0 & \text{, si} x \in [r_3, b] \end{cases}$$

Cuya representación es:

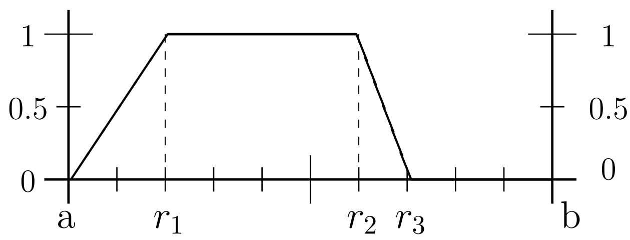


Figura 4.2: Ejemplo de medida

Una vez hallada la medida habrá que contrastarla con el uso secundario de P en X, y en caso de que no coincida, modificarla, pudiendo para ello modificar los valores $r_1$, $r_2$, $r_3$, o las restricciones (por ejemplo que sea cuadrática), o incluso podríamos tener que revisar el orden parcial hallado en el paso anterior.

Después de haber refinado la medida, la obtención de la función de pertenencia es inmediata, $\mu_P(x) = m(\phi(x))$. Ha quedado por tanto definida la función de pertenencia al conjunto borroso $\underset{\sim}{P}$ y por tanto caracterizado. Una posible ventaja de este método es que "el usuario" tiene claro que está intentando medir cuán x es P, la posibilidad de que x es P, etc.

El modelo así obtenido es una aproximación experimental al uso de P en X, que deberá ser contrastado por el usuario y, si dicha aproximación se aleja demasiado del uso de P en X, deberá ser variado, hasta conseguir una buena aproximación que sea aceptada por el usuario. En el caso de que dicho uso cambie o evolucione el modelo deberá ser reconstruido o modificado convenientemente para adecuarse al nuevo uso de P en X.

## 4.3 Representación de la negación

Una vez obtenida la función de pertenencia, otra función fácilmente construible a partir de esta es su negación, que intenta representar la negación en el lenguaje. En la bibliografía consultada, está ampliamente extendido el uso de las negaciones fuertes como modificadores externos, que transforman un predicado en su negado, obteniendo así una generalización de las negaciones lógicas.

La relación que existe entre el modelo de P ($\underset{\sim}{P}$, X, S, $\preceq_P$, $\phi_P$, $m_P$, $\mu_P$) y el modelo de noP ( $\underset{\sim}{noP}$ , X, S, $\preceq_{noP}$, $\phi_P$, $m_{noP}$, $\mu_{noP}$) es la siguiente:

- El universo de discurso es el mismo para ambos predicados X.

- La característica medible en que nos fijamos para usar P en X y noP en X es la misma $\phi_P$.

- El rango de aplicación de dicha característica medible es el mismo S.

- El orden parcial de la negación es el inverso del orden parcial del predicado.

$$\preceq_{noP} = \preceq_P^{-1}$$

- La medida $m_{noP}$ de noP se obtiene por la aplicación de una función de negación N a la medida $m_P$ de P.

$$m_{noP}(x) = N(m_P)(x)$$

- Quedando, por tanto, la función de pertenencia de noP definida así:

$$\mu_{noP}(x) = m_{noP}(\phi_{noP}(x)) = N(m_P(\phi_P(x))) = N(\mu_P(x))$$

Si tenemos en cuenta que el orden parcial de la negación es el inverso del orden parcial del predicado (independientemente de la función N utilizada para hallar la negación), el orden que se obtendría de aplicar una negación al ejemplo de la Figura 4.1 es:

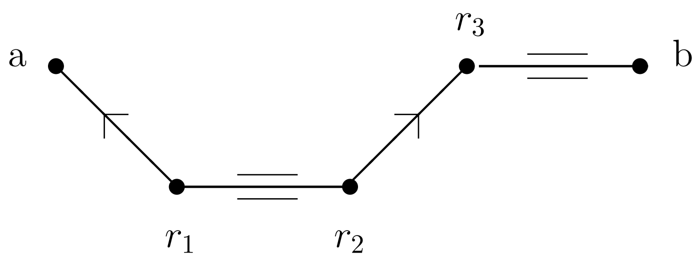


Figura 4.3: Orden parcial de la negación

Sin embargo, la función de pertenencia de la negación del predicado depende de la función N utilizada, por ejemplo: si usamos $N(x) = 1 - x$ como función de negación, la función de pertenencia de la negación del predicado de la Figura 4.2 es:

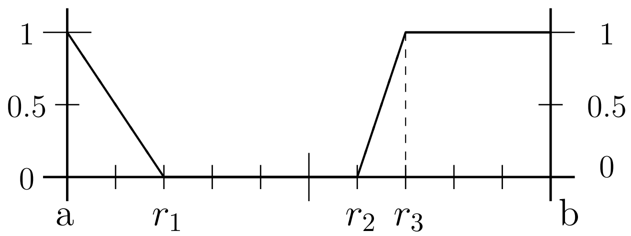


Figura 4.4: Función de pertenencia de la negación

Mientras que si usamos $N(x) = \sqrt{1 - x^2}$ como función de negación, la función de pertenencia que obtenemos es:

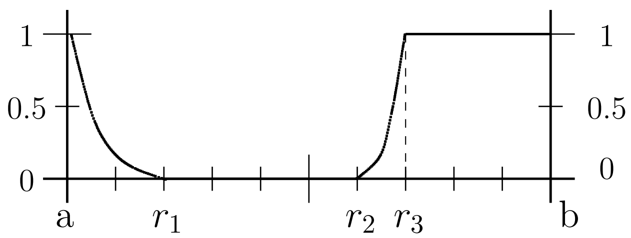


Figura 4.5: Función de pertenencia de la negación

Para cada predicado, parece lógico que habría que elegir la función N que vamos a utilizar para generar la negación dependiendo del uso que se haga de la negación de ese predicado en el lenguaje. Esto no ocurre en las teorías estándar, ya que la función de negación es la misma para todos los predicados.

Para elegir la negación de cada predicado habrá que experimentar con distintas funciones N para ver cuál es la que mejor se ajusta al uso de la negación de ese predicado que se hace en X.

## 4.4 Representación del antónimo

El uso del antónimo, sin embargo, todavía no ha sido caracterizado satisfactoriamente pese a los diversos intentos que se han hecho. Éste empeño surge de la importancia que tiene el antónimo dentro de lógica borrosa, ya que desempeña un papel fundamental en la formación de las variables lingüísticas, que se construyen a partir del predicado y su antónimo, y sus modificaciones o combinaciones mediante conectivos.

Además lingüistas como John Lyons (ver [Lyo77]), Adrienne Lehrer, Keith Lehrer (ver [LL82]) y Mário Vilela (ver [Vil82]), le otorgan un valor predominante en la estructuración y categorización del lenguaje. Esto lo pone de manifiesto John Lyons en [Lyo77]:

> "Sea como sea, el lingüista debe tomar en consideración que la oposición binaria es uno de los principios más importantes que gobiernan la estructura de las lenguas y que su más evidente manifestación, por lo que se refiere al vocabulario, es precisamente la antonimia."
>
> "Hemos observado ya que la antonimia refleja o determina lo que parece una tendencia humana general a categorizar la experiencia a base de contrastes dicotómicos."

La definición de antónimo que da el diccionario de la Real Academia Española es:

> "Dícese de las palabras que expresan ideas opuestas o contrarias."

Pero el uso de los antónimos, si consultamos un diccionario de antónimos, es muy amplio. Para referirnos a este uso amplio le llamaremos "Antónimo en sentido amplio", para así englobar los distintos tipos de relaciones existentes entre las palabras consideradas antónimos. (Consultar la tipología propuesta por Mário Vilela [Vil82])

Dada la importancia de los antónimos, algunos autores han dedicado bastante tiempo y esfuerzo a ellos en los últimos años, consiguiendo algunos avances que se irán presentando.

Dada la relación existente entre un predicado y su antónimo, se plantearon las siguientes relaciones entre la función de pertenencia de un predicado y la función de pertenencia de su antónimo (ver [TC00]):

a) $\mu_{aaP}(x) = \mu_P(x)$

b) Si $0 < \mu_P(x) < \mu_P(y)$ entonces $\mu_{aP}(x) \geq \mu_{aP}(y)$

c) $\mu_{aP}(x) \leq \mu_{\neg P}(x)$

Cualquier operador que partiendo de la función de pertenencia de un predicado obtuviera la función de pertenencia de su antónimo, debería cumplir una serie de propiedades para asegurar que la función obtenida cumpla con las relaciones anteriores. Se consideró que dicho operador debía ser un modificador interno $\alpha : S \to S$ y que debía cumplir:

a) $\mu_P(\alpha(\alpha(x))) = \mu_P(x)$

b) Si $0 < \mu_P(x) < \mu_P(y)$ entonces $\mu_P(\alpha(x)) \geq \mu_P(\alpha(y))$.

c) $\mu_P(\alpha(x)) \leq \mu_{\neg P}(x)$

El primer modificador, cuyo uso esta actualmente más extendido, que cumplió estas propiedades es:

$$\alpha(x) = a + b - x$$

Siendo a y b los extremos del intervalo $S$ en que está definido $\mu_P$. Un ejemplo de la aplicación de este antónimo a un posible uso Joven sería:

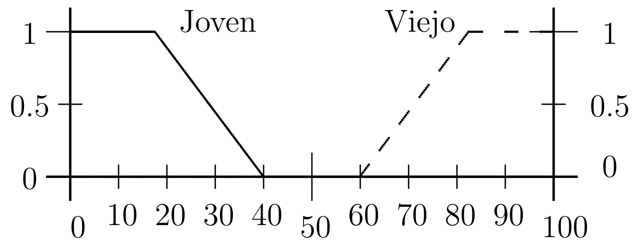


Figura 4.6: Joven ↔ Viejo

Este modificador realiza una simetría horizontal respecto del punto medio del intervalo [a,b], llamada simetría perfecta. Se originó como un reflejo de la negación usual $N(x) = 1 - x$, que realiza una simetría vertical respecto del punto medio del intervalo [0,1].

La ventaja de este modificador es que permite hallar el antónimo de todos los predicados fácilmente y usando siempre el mismo operador. Con este modificador a cada predicado le corresponde un único antónimo, siendo esto una desventaja ya que no permite ningún ajuste según el predicado en cuestión. Además, tiene problemas si el predicado toma valores positivos más allá del punto medio. Por ejemplo el antónimo de un posible uso de Pequeño quedaría:

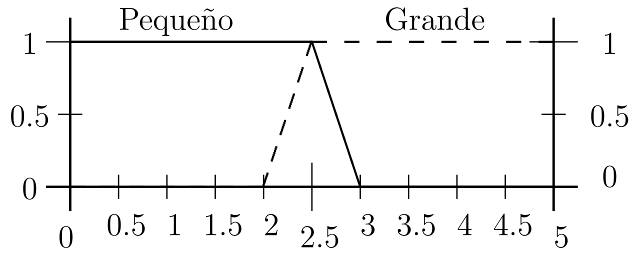


Figura 4.7: Pequeño ↔ Grande

En este ejemplo el antónimo propuesto contradice la propiedad c) requerida, ya que es mayor que la negación de Pequeño. El problema surge porque en la construcción de este modificador se consideró implícitamente, que el punto medio del intervalo coincide con el punto medio del predicado. Esto no siempre ocurre como puede verse en el siguiente ejemplo de botellas, donde puede verse que el punto medio de lleno no coincide con el punto medio de la escala.

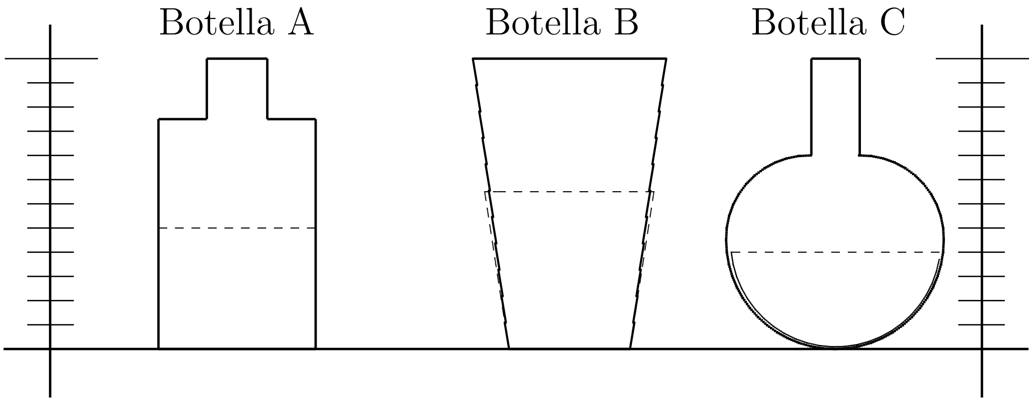


Figura 4.8: Botellas medio llenas

Llamando 'c' a este punto medio del predicado, E. Trillas y S. Cubillo plantean en [TA99] el siguiente modificador como solución:

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{c-b}{c-a}x + \frac{c(b-a)}{c-a} & \text{, Si } a \leq x \leq c \\ \frac{c-a}{c-b}x + \frac{c(a-b)}{c-b} & \text{, Si } c \leq x \leq b \end{cases}$$

Este nuevo modificador cumple las exigencias del antónimo si se elige correctamente el punto 'c'. Este modificador realiza una simetría horizontal respecto del punto 'c' (es el punto fijo de la simetría $\alpha$), solucionando así el problema planteado y permitiendo ajustar el valor de 'c' dependiendo del caso. El nuevo antónimo generado quedaría:

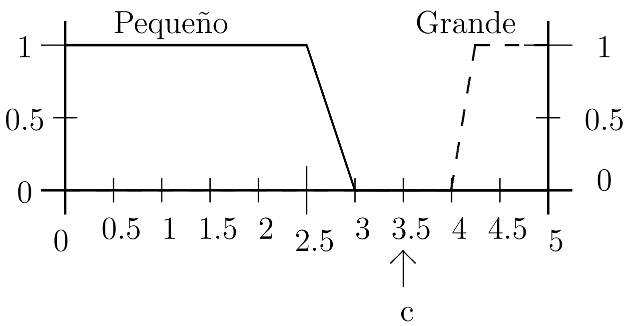


Figura 4.9: Pequeño↔ grande

Como vemos en el ejemplo, se consigue que no se solapen el predicado y su antónimo, porque hemos elegido 'c' fuera del soporte del predicado (soporte es el conjunto de puntos donde la función de pertenencia toma valores positivos, soporte=$\{x; \mu_P(x) > 0 \forall x \in X\}$). La elección del valor de 'c' se hará de acuerdo al uso concreto que hagamos del predicado y de su antónimo.

Se creía que este modificador serviría para hallar el antónimo de todos los predicados, pero se encontraron contraejemplos donde el antónimo obtenido no coincide con el uso del antónimo en el lenguaje. Algunos de estos ejemplos son “Cerca de 4” o “Temperatura agradable”.

Veamos que ocurre en el caso de “Cerca de 4”:

Si aplicamos el modificador anterior a “Cerca de 4”y tomamos $c = 5$ obtenemos el antónimo siguiente:

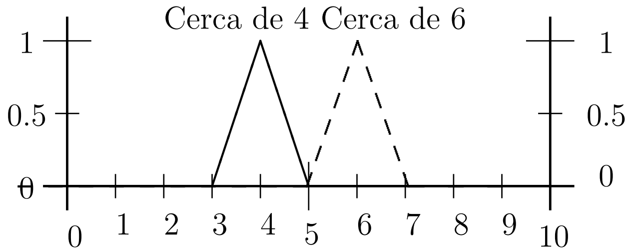


Figura 4.10: Cerca de 4 $\leftrightarrow$ Lejos de 4

El antónimo de “Cerca de 4”en el lenguaje sería “Lejos de 4”. Sin embargo, el “antónimo”resultante se parece más al predicado “Cerca de 6”que no es una representación válida del antónimo de “Cerca de 4”.

El problema en este caso surge porque se considera que el orden lineal del intervalo [a,b] es el orden inducido por el predicado y por tanto éste es el que hay que invertir. Pero en casos como el de “Cerca de 4” o “Temperatura agradable”, donde el orden inducido por el predicado no coincide con el orden lineal del intervalo [a,b], surgen problemas al usar el modificador propuesto.

Para intentar resolver estos problemas E.Trillas, S.Cubillo y E.Castiñeira recogieron en [ST99] algunas propiedades que deben cumplir los antónimos:

1. Considerado un par de antónimos (P,Q), en que P es antónimo de Q y Q es antónimo de P. Entonces de $P = aQ$ y $Q = aP$ se sigue $P = a(aP)$ y $Q = a(aQ)$. La relación establecida entre (P,aP) es una simetría.

2. Para cada objeto x si “x es P”entonces no es “x es aP”y si “x es aP”entonces no es “x es P”. Es decir, aP implica noP, siendo un caso límite aP=noP.

3. Para todo par de antónimos (P,Q) P y Q son disjuntos. Esto puede entenderse como que P y Q son contradictorios o como que P y Q son incompatibles.

4. Cuanto más aplicable es un predicado P a un objeto menos aplicable es aP.

5. Entre los objetos a los que se puede aplicar P y a los que se puede aplicar aP debería haber una zona de indiferencia, es decir, un subconjunto de objetos a los que no se puede aplicar ni P ni aP.

Para formalizar estas condiciones, vamos a considerar que el modelo de P es ($\underset{\sim}{P}$, X, S, $\preceq_P$, $\phi_P$, $m_P$, $\mu_P$), y el modelo de aP que queremos hallar ($\underset{\sim}{aP}$, X, S, $\preceq_{aP}$, $\phi_{aP}$, $m_{aP}$, $\mu_{aP}$). Para ello supondremos que $\phi_P = \phi_{aP}$ y que existe una función A que dado ($\mu_P$) devuelve ($\mu_{aP}$) usando para ello $\preceq_P$, $\phi_P$ y $\mu_P$. Esta función deberá cumplir:

1. $A(\mu_P) = \mu_{aP}$ y $A(\mu_{aP}) = \mu_P$.

2. $A(\mu_P) \leq N(\mu_P)$ y $\mu_P \leq N(A(\mu_P))$, es decir que P y aP son N-contradictorios.

3. $A(\mu_P)$ y $\mu_P$ son disjuntos.

4. $\phi(x) \preceq_P \phi(y) \Leftrightarrow \phi(y) \preceq_{aP} \phi(x)$.

5. $\exists x / A(\mu_P)(x) = \mu_P(x) = 0$.

Diremos que dos conjuntos son disjuntos si su intersección es vacía. Si suponemos que la intersección la realizamos mediante una T-norma $T_\mu$ y que $\mu_0$ denota el conjunto vacío, si $T_\mu(\mu_P, \mu_{aP}) = \mu_0$ entonces son $T_\mu$-disjuntos. En [ST99] demostraron que eligiendo $T_\mu$ perteneciente a la familia de Lukasiewicz y $N$ una negación fuerte adecuados, se cumplen las condiciones 2 y 3.

En [ST99] definen además los siguientes tipos de antónimos:

1. Estrictos: un par de antónimos (P,aP) son estrictos si aP estrictamente menor que la negación de P, es decir, $\exists x / \mu_{aP}(x) < N(\mu_P(x))$. En otro caso son no-estrictos o complementarios y $aP = noP$.

2. Regulares: un par de antónimos (P,aP) son regulares si entre P y aP existe zona de indiferencia, es decir, $\mathcal{N}(\mu_P, \mu_{aP}) = \{x \in X; \mu_P(x) = \mu_{aP}(x) = 0\} \neq \emptyset$

3. Perfectos: un par de antónimos (P,aP) son perfectos si existe una simetría $\alpha_P : S \rightarrow S$ tal que $\mu_{aP}(x) = \mu_P(\alpha_P(x))$.

Como solución al problema que se había planteado al hallar el antónimo de "Cerca de 4"mediante una única simetría, Trillas y Cubillo proponen en [ST99] elegir un conjunto de simetrías que inviertan el orden del predicado $\preceq_P$ no el orden lineal de $S$ que es lo que hacia la simetría anterior. Este nuevo modificador para hallar el antónimo cumple con las siguientes propiedades:

a) $\mu_P(\alpha(\alpha(x))) = \mu_P(x)$

b) Si $\mu_P(x) \preceq_P \mu_P(y)$ entonces $\mu_P(\alpha(y)) \preceq_{aP} \mu_P(\alpha(x))$, con $\preceq_{aP}=\preceq_P^{-1}$.

c) $\mu_P(\alpha(x)) \leq \mu_{\neg P}(x)$

Para aplicar este nuevo modificador al ejemplo de "Cerca de 4", primero debemos partir el intervalo [0,10] en dos intervalos en los que la función sea creciente [0,4] o decreciente [4,10], y realizar una simetría en cada intervalo. el antónimo obtenido quedaría así:

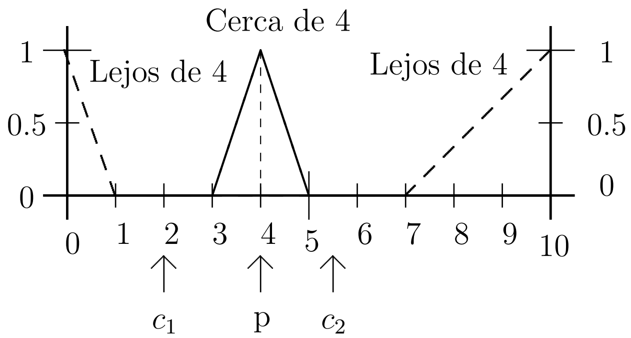


Figura 4.11: Cerca de 4 $\leftrightarrow$ Lejos de 4

En este modificador tenemos 3 parámetros que ajustar: el punto de partición 'p' (que divide el rango S en dos rangos donde el orden de P decrece o crece), y los puntos fijos, '$c_1$' y '$c_2$', para la simetría que se realiza en cada partición. Este modificador contiene al anterior como un caso particular, en cual no hacemos ninguna partición y sólo hay una simetría.

Aunque este modificador parece que funciona para obtener el antónimo de muchos predicados, hemos encontrado algunos predicados para los que el antónimo que se obtiene aplicando este modificador no se corresponde completamente con el antónimo del lenguaje.

Uno de estos ejemplos es "Cerca de 2". En este caso el antónimo que se obtiene es el siguiente:

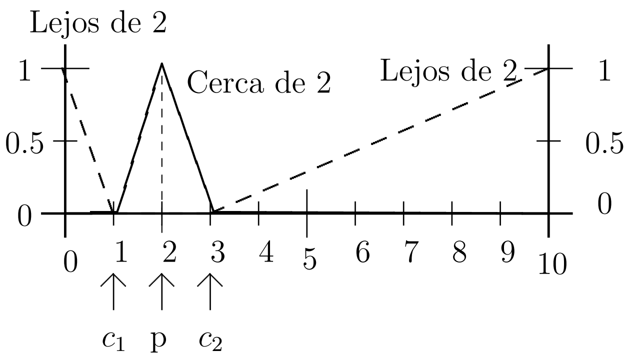


Figura 4.12: Cerca de 2 ↔ Lejos de 2

Como vemos en el ejemplo, solamente están "Lejos de 2"con grado 1 el 0 y el 10, lo cual quiere decir que el 0 y el 10 están igual de lejos de 2 (al tener el mismo grado), y que el 0 está más lejos de 2 que el 6, 7, 8 o 9 (que tiene grado menor que 1).

Esto contradice claramente el uso de "Lejos de 2"en el lenguaje, que no consideraría el 0 como "Lejos de 2"y en cambio sí consideraría el 6, 7, 8 o 9 como "Lejos de 2". Una posible representación de este uso sería la siguiente:

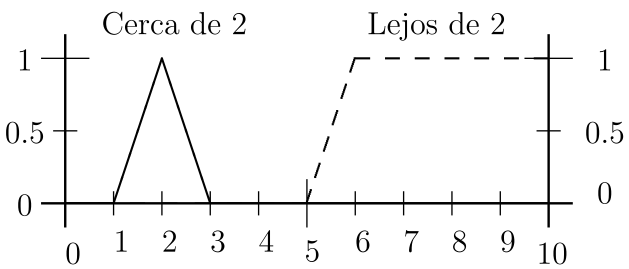


Figura 4.13: Cerca de 2 ↔ Lejos de 2

Esta representación nos sugiere que los elementos que están "Lejos de 2"son los que se encuentran a una distancia euclídea de 2 mayor que 4, por tanto el 0 no estaría "Lejos de 2"y sí lo estarían el 6, 7, 8, 9 y 10.

La conclusión general que sacamos de este ejemplo es que: Si para determinar que un elemento está "Cerca de 2"nos basamos en que está a una distancia pequeña de 2, y para determinar que un elemento está "Lejos de 2"nos basamos en que está a una distancia grande de 2, sería más lógico representar los predicados "Cerca de 2"y "Lejos de 2"en función de las distancias de los elementos a 2.

Para intentar resolver este problema primero vamos proponer un modelo del predicado binario $Q \equiv$"x está cerca de y", que representa que un número x esta cerca de otro y. Un posible modelo de este predicado es el siguiente ($\underset{\sim}{Q}$, $X = \Re \times \Re$, S, $\preceq$, $\phi$, $m$, $\mu_Q$) donde:

- El universo de discurso son pares de números (x,y) con $x, y \in \Re$.

- La característica medible $\phi$ será la distancia que hay de 'x' a 'y', siendo esta distancia una función $d : \Re \times \Re \rightarrow S$.

- El rango S en el que tomará los valores la característica medible dependerá de la función de distancia utilizada.

- El orden parcial $\preceq$ inducido por Q será maximal para valores de distancia menores de un valor $\varepsilon$, decreciente para valores de distancia entre $\varepsilon$ y $\rho$, y minimal para valores de distancia mayores de $\rho$ (con $\varepsilon, \rho \in S$). Este orden coincide con el que impone el uso normal de "cerca de", ya que para distancias pequeñas los elementos están totalmente cerca, según aumenta la distancia disminuye la cercanía y para distancias grandes los elementos no están cerca.

- Una medida acorde con el orden parcial obtenido tiene que valer 1 para distancias menores de $\varepsilon$, decrecer para distancias entre $\varepsilon$ y $\rho$ y valer 0 para distancias mayores de $\rho$. Debiendo hallar la medida adecuada a cada caso.

- La función de pertenencia de este predicado Q sería: $\mu_Q(x, y) = m(\phi(x, y)) = m(d(x, y))$.

Con ello, una posible función de pertenencia del predicado "x está cerca de y"es:

$$\mu_{cerca}(x, y) = \begin{cases} 1 & , \text{si } d(x, y) \leq \varepsilon \\ 1 - \frac{d(x,y)}{\rho - \varepsilon} & , \text{si } \varepsilon \leq d(x, y) \leq \rho \\ 0 & , \text{si } \rho \leq d(x, y) \end{cases}$$

(Dividimos la distancia d(x,y) por $\rho - \varepsilon$ para normalizarla y que tome valores entre 0 y 1.)

Para el ejemplo de "Cerca de 2", si queremos obtener la representación del ejemplo de la Figura 4.13, tomaremos $X = [0, 10]$, la distancia euclídea $d(x, y) = |x - y|$, $\varepsilon = 0$ y $\rho = 1$, quedando su función de pertenencia así definida:

$$\mu_{cerca}(x, 2) = \begin{cases} 1 & \text{, si } |x-2| \leq 0 \\ 1 - |x-2| & \text{, si } 0 \leq |x-2| \leq 1 \\ 0 & \text{, si } 1 \leq |x-2| \leq 10 \end{cases}$$

Si descomponemos el valor absoluto en desigualdades obtenemos la función de pertenencia usada en la representación de "Cerca de 2"en el ejemplo de la Figura 4.13, que es:

$$\mu_{Cercade2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{, si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{, si } x = 2 \\ 3-x & \text{, si } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{, si } 3 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Pero ahora para hallar el antónimo no usaríamos esta función sino la de "x está cerca de y", que es la que usa la distancia en su definición. El antónimo de "x está cerca de y"es "x está lejos de y", y su modelo sería ($\underset{\sim}{aQ}$, $X = \Re \times \Re$, S, $\preceq_{aQ}$, $\phi_{aQ}$, $m_{aQ}$, $\mu_{aQ}$), y las relaciones que entre su modelo y el del predicado Q son:

- El universo de discurso de ambos es el mismo.

- La característica medible de aQ es la misma de Q, es decir, la misma distancia d(x,y).

- El rango S es el mismo que el de Q.

- El orden parcial $\preceq_{aQ}$ inducido por aQ será minimal para valores de distancia menores de un valor $\delta$, creciente para valores de distancia entre $\delta$ y $\theta$, y maximal para valores de distancia mayores de $\theta$ (con $\delta, \theta \in S$). Este orden coincide con el que impone el uso normal de "lejos de", ya que para distancias pequeñas los elementos no están lejos, según aumenta la distancia aumenta la lejanía y para distancias grandes están totalmente lejos. Este orden debe estar incluido dentro del orden inverso de Q, que sería el orden parcial de la negación de Q, por lo tanto el $\delta$ y el $\theta$ que elijamos deben cumplir: que $\delta \geq \varepsilon$ y que $\theta \geq \rho$.

- Una medida $m_{aQ}$ acorde con el orden parcial obtenido tiene que valer 0 para distancias menores de $\delta$, crecer para distancias entre $\delta$ y $\theta$, y valer 1 para distancias mayores $\theta$. Debiendo hallar la medida adecuada a cada caso.

- La función de pertenencia de aQ sería: $\mu_{aQ}(x,y) = m_{aQ}(\phi(x,y)) = m_{aQ}(d(x,y))$.

Una posible función de pertenencia del predicado “x está lejos de y”es:

$$\mu_{lejos}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{, si } d(x,y) \leq \delta \\ \frac{d(x,y)}{\theta-\delta} & \text{, si } \delta \leq d(x,y) \leq \theta \\ 1 & \text{, si } \theta \leq d(x,y) \end{cases}$$

(Dividimos la distancia d(x,y) entre $\theta - \delta$ para normalizarla y que tome valores entre 0 y 1).

Para el ejemplo de “Lejos de 2”, si queremos obtener la representación del ejemplo de la Figura 4.13, tomaremos la distancia euclídea $d(x,y) = |x-y|$, $\delta = 3$ y $\theta = 4$, quedando su función de pertenencia así definida:

$$\mu_{lejos}(x,2) = \begin{cases} 0 & \text{, si } |x-2| \leq 3 \\ |x-2| & \text{, si } 3 \leq |x-2| \leq 4 \\ 1 & \text{, si } 4 \leq |x-2| \end{cases}$$

Si descomponemos el valor absoluto en desigualdades obtenemos la función de pertenencia “Lejos de 2”:

$$\mu_{Lejosde2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } 0 \leq x \leq 5 \\ x-5 & \text{, si } 5 \leq x \leq 6 \\ 1 & \text{, si } 6 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Podemos observar que la representación de las funciones de pertenencia de "Cerca de 2"y de su antónimo "Lejos de 2", obtenidas mediante la distancia euclídea, concuerdan con la representación de la Figura 4.13:

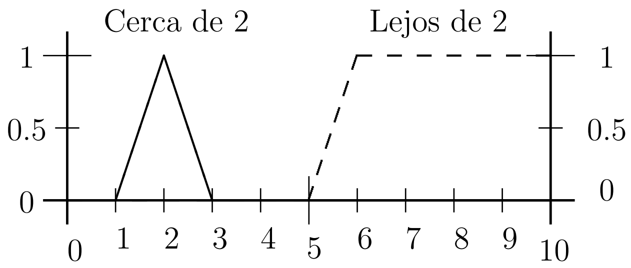


Figura 4.14: Cerca de 2 $\leftrightarrow$ Lejos de 2, basado en distancias

Obtenemos de este modo un modelo que se aproxima mejor al uso del antónimo "Lejos de 2". Donde el 0 no está lejos de 2 y sí lo están los mayores de 6, siendo el 10 el que está más lejos, lo cual no ocurría en el antónimo propuesto anteriormente.

Para comprobar que este método es mejor que el método de múltiples simetrías propuesto anteriormente, vamos a probarlo con el ejemplo de "Cerca de 4"en donde el antónimo que obteníamos era válido.

Si usamos el predicado "x está cerca de y"para obtener el predicado "Cerca de 4" obtenemos la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_{cerca}(x,4) = \begin{cases} 1 & \text{, si } |x-4| \leq 0 \\ 1-|x-4| & \text{, si } 0 \leq |x-4| \leq 1 \\ 0 & \text{, si } 1 \leq |x-4| \end{cases}$$

En la que si descomponemos el valor absoluto en desigualdades obtenemos la función de pertenencia usada en la representación de "Cerca de 4"en el ejemplo de la Figura 4.11, que es:

$$\mu_{Cercade4}(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } 0 \leq x \leq 3 \\ x-3 & \text{, si } 3 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{, si } x = 4 \\ 5-x & \text{, si } 4 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{, si } 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Y si ahora usamos el predicado "x está lejos de y"para obtener el antónimo de

"Cerca de 4"que es "Lejos de 4", obtenemos la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_{lejos}(x,4) = \begin{cases} 0 & , \text{si } |x-4| \leq 3 \\ |x-4| & , \text{si } 3 \leq |x-4| \leq 4 \\ 1 & , \text{si } 4 \leq |x-4| \end{cases}$$

Si descomponemos el valor absoluto en desigualdades obtenemos una función de pertenencia distinta de la usada en la representación de "Lejos de 4"en el ejemplo de la Figura 4.11, esta nueva función de pertenencia es:

$$\mu_{Lejosde4}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{si } x = 0 \\ 1-x & , \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{si } 1 \leq x \leq 7 \\ x-7 & , \text{si } 7 \leq x \leq 8 \\ 1 & , \text{si } 8 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

La representación este nuevo antónimo quedaría:

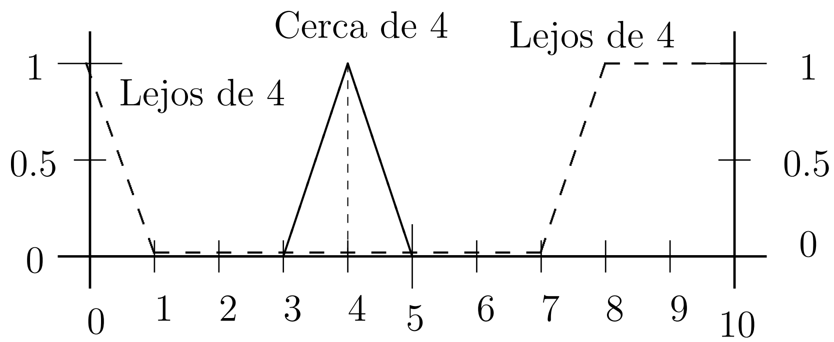


Figura 4.15: Cerca de 4 ↔ Lejos de 4, basado en distancias

Este nuevo antónimo parece aproximarse mejor al uso de "Lejos de 4", ya que considera que el 0 y los mayores de 8 están lejos de 4 pero además el 10 está más lejos de 4 que el 0 porque hay números menores de 10 que están lejos de 4 y no hay números mayores de 0 que estén lejos de 4, esto concuerda mejor con el uso de "Lejos de 4".

En este nuevo método para hallar el antónimo basado en distancias, tendremos que fijar la distancia d que vamos a utilizar y los valores $\varepsilon, \rho, \delta, \theta \in S$ adecuadamente, para así obtener un modelo adecuado del uso del predicado y del antónimo en el universo de discurso.

Por ejemplo, si cogemos como función de distancia $d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ que toma valores en [0,1], y elegimos $\varepsilon = 0$ y $\rho = 1$, la función de pertenencia de "x está cerca de y"es:

$$\mu_{cerca}(x,y) = \begin{cases} 1 & , \text{si } \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq 0 \\ 1 - \frac{|x-y|}{1+|x-y|} & , \text{si } 0 \leq \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq 1 \\ 0 & , \text{si } 1 \leq \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \end{cases}$$

Si aplicamos este predicado para hallar la función de pertenencia de "Cerca de 2", esta queda:

$$\mu_{cerca}(x,2) = \begin{cases} 1 & , \text{si } \frac{|x-2|}{1+|x-2|} \leq 0 \\ 1 - \frac{|x-2|}{1+|x-2|} & , \text{si } 0 \leq \frac{|x-2|}{1+|x-2|} \leq 1 \\ 0 & , \text{si } 1 \leq \frac{|x-2|}{1+|x-2|} \end{cases}$$

Simplificando la función anterior, descomponiendo el valor absoluto en desigualdades y restringiendo el valor de x a [0,10] obtenemos la siguiente función de pertenencia de "Cerca de 2":

$$\mu_{Cercade2}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2-x}{3-x} & , \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & , \text{si } x = 2 \\ 1 - \frac{x-2}{x-1} & , \text{si } 2 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Ahora para calcular el antónimo usaremos el predicado "x está lejos de y"que para la distancia propuesta tiene la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_{lejos}(x,y) = \begin{cases} 0 & , \text{si } \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq \delta \\ \frac{|x-y|}{1+|x-y|} & , \text{si } \delta \leq \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq \theta \\ 1 & , \text{si } \theta \leq \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \end{cases}$$

Si aplicamos este predicado para hallar la función de pertenencia de "Lejos de 2", esta queda:

$$\mu_{lejos}(x,2) = \begin{cases} 0 & , \text{si } \frac{|x-2|}{1+|x-2|} \leq \delta \\ \frac{|x-2|}{1+|x-2|} & , \text{si } \delta \leq \frac{|x-2|}{1+|x-2|} \leq \theta \\ 1 & , \text{si } \theta \leq \frac{|x-2|}{1+|x-2|} \end{cases}$$

Si tomamos $\delta = \varepsilon = 0$ y $\theta = \rho = 1$ entonces el antónimo coincidirá con la negación del predicado "Cerca de 2", como podemos comprobar a continuación:

$$\mu_{lejos}(x,2) = \begin{cases} 0 & , \text{si } \frac{|x-2|}{1+|x-2|} \leq 0 \\ \frac{|x-2|}{1+|x-2|} & , \text{si } 0 \leq \frac{|x-2|}{1+|x-2|} \leq 1 \\ 1 & , \text{si } 1 \leq \frac{|x-2|}{1+|x-2|} \end{cases}$$

Simplificando la función anterior, descomponiendo el valor absoluto en desigualdades y restringiendo el valor de x a [0,10] obtenemos la siguiente función de pertenencia de "Lejos de 2", que coincide con la negación de "Cerca de 2":

$$\mu_{Lejosde2}(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{3-x} & , \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \text{si } x = 2 \\ \frac{x-2}{x-1} & , \text{si } 2 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

La representación de este ejemplo de "Cerca de 2", "Lejos de 2"quedaría:

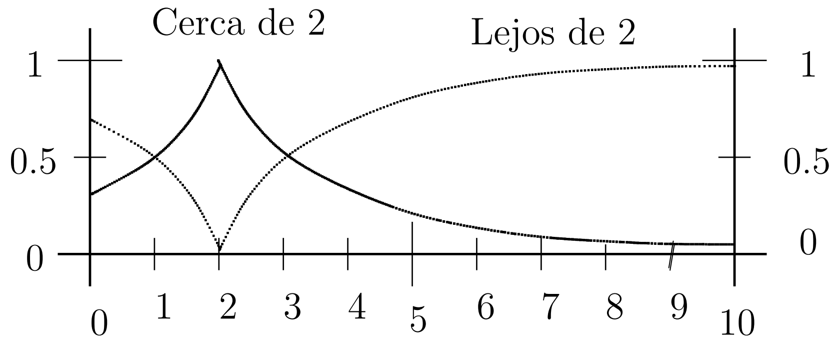


Figura 4.16: Cerca de 2 ↔ Lejos de 2, coincide con la negación

Sin embargo si tomamos $\delta = 0.5 > \varepsilon$ y $\theta = \rho = 1$ entonces el antónimo estará incluido en la negación del predicado "Cerca de 2"y su función de pertenencia es:

$$\mu_{lejos}(x, 2) = \begin{cases} 0 & , \text{si } \frac{|x-2|}{1+|x-2|} \leq 0.5 \\ \frac{|x-2|}{1+|x-2|} & , \text{si } 0.5 \leq \frac{|x-2|}{1+|x-2|} \leq 1 \\ 1 & , \text{si } 1 \leq \frac{|x-2|}{1+|x-2|} \end{cases}$$

Simplificando la función anterior, descomponiendo el valor absoluto en desigualdades y restringiendo el valor de x a [0,10] obtenemos la siguiente función de pertenencia de "Lejos de 2":

$$\mu_{Lejosde2}(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{2-x} & , \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{x-3}{x-2} & , \text{si } 3 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

La representación de este otro ejemplo de “Cerca de 2”, “Lejos de 2”quedaría:

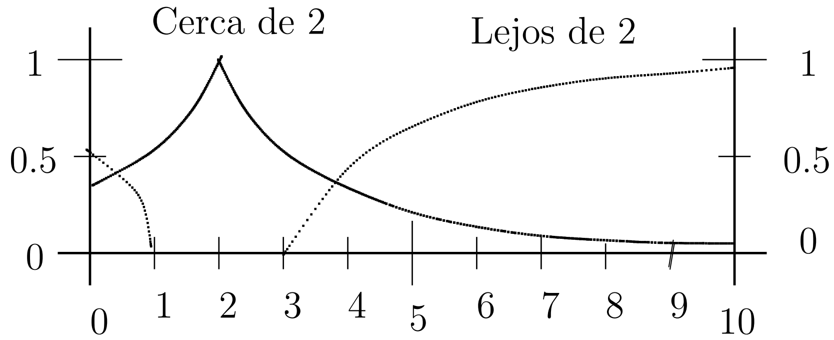


Figura 4.17: Cerca de 2 ↔ Lejos de 2, incluido en la negación

## 4.5 Representación de una variable lingüística

Una variable lingüística es un conjunto de términos lingüísticos referentes a una propiedad de un conjunto de objetos, un término lingüístico es un predicado que nos permite definir el valor de esa propiedad de los objetos. Los términos lingüísticos los vamos a generar a partir del término principal que es un predicado simple, de su antónimo, de una negación, de un conjunto de modificadores y de un conjunto de conectivos.

Las variables lingüísticas nos van a permitir modelizar el significado de las proposiciones enunciativas:

- Simples: Involucran a un predicado simple, este puede ser el término principal de la variable o su antónimo. Las representaremos utilizando los modelos construidos experimentalmente para el predicado y su antónimo.

- Derivadas: Involucran a un predicado y a un modificador, el modificador puede ser la negación u otros modificadores usados en el lenguaje. Construiremos su modelo usando un tipo de modificador y el modelo del predicado.

- Compuestas: Involucran a dos predicados y a un conectivo, el conectivo puede ser la conjunción, disyunción u otros conectivos usados en el lenguaje. Construiremos su modelo usando un tipo de conectivo y los modelos de los dos predicados.

En los apartados siguientes explicaremos los distintos tipos de modificadores y conectivos utilizados y daremos criterios para elegir el más adecuado para cada proposición.

### 4.5.1 Representación de modificadores

Un modificador es una cerca lingüística que utilizamos en el lenguaje para restringir, ampliar o modificar el significado de un predicado graduable. Vamos a utilizar tres tipos generales de modificadores:

- Concentradores: al aplicarlos restringen el significado, y por tanto el uso, del predicado, $\mu_{MP} \leq \mu_P$.

- Dilatadores: al aplicarlos amplian el significado, y por tanto el uso, del predicado, $\mu_P \leq \mu_{MP}$.

- Mixtos o intensificadores de contraste: al aplicarlos restringen una parte del significado del predicado y amplían otra.

Para representar estos modificadores que aplicamos a los predicados, se usan mucho los operadores externos, que modifican los valores la función de pertenencia del predicado mediante una función $m : [0,1] \rightarrow [0,1]$. Esta función depende sólo del tipo de modificador que queremos conseguir,los modificadores propuestos originalmente por Zadeh para “Muy”, “Moderadamente”y “Bastante”son los siguientes (ver [Sob92]):

- Para el modificador “Muy”:

$$\mu_{MuyP}(x) = con(\mu_p(x)) = (\mu_P(x))^2$$

- Para el modificador “Moderadamente”:

$$\mu_{ModeradamenteP}(x) = dil(\mu_P(x)) = \sqrt{\mu_P(x)}$$

- Para el modificador “Bastante”:

$$\mu_{BastanteP}(x) = int(\mu_P(x)) = \begin{cases} 2(\mu_P(x))^2 & si\ 0 \leq \mu_P(x) \leq 0.5 \\ 1 - 2(1 - \mu_P(x))^2 & si\ 0.5 \leq \mu_P(x) \leq 1 \end{cases}$$

Un ejemplo de aplicación de estos modificadores "Muy"y "Moderadamente" al predicado "Joven"es la siguiente:

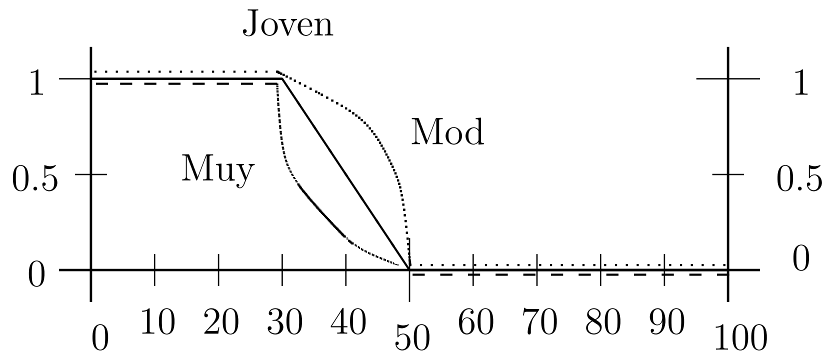


Figura 4.18: Modificadores externos aplicados a Joven

Otro ejemplo de aplicación de estos modificadores externos al predicado "Temperatura agradable"es la siguiente:

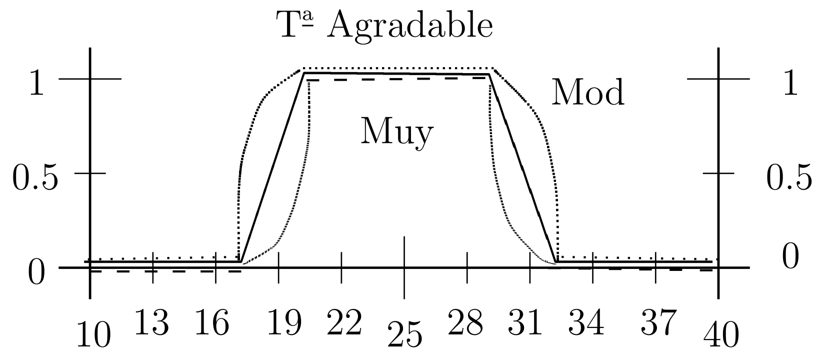


Figura 4.19: Modificadores externos aplicados a Tª Agradable

La ventaja de usar un modificador externo es que puede usarse la misma función para todos los predicados, aunque esto también puede verse como una desventaja, ya que hace que el uso de los modificadores sea muy rígido. Otra desventaja que tienen es que cambian la forma del predicado, por ejemplo a un predicado que tuviera forma lineal cambiaría su forma a cuadrática.

Estudios detallados [HC76] sobre modificadores parecen indicar que los operadores externos no reflejan bien el uso de los modificadores en el lenguaje. Para solucionar este problema se sugiere utilizar operadores internos $m : S \rightarrow S$ que cambien la función de pertenencia del predicado desde dentro. Este tipo de modificador depende totalmente del predicado en cuestión, ya que no tiene en muchos casos sentido aplicar un modificador de un predicado a otro predicado.

Los modificadores internos propuestos se basan en un desplazamiento de la función de pertenencia del predicado para obtener la función de pertenencia del predicado modificado.Para el predicado "Joven" un ejemplo de este tipo de modificadores sería:

- Si queremos un concentrador, desplazamos la función una cierta distancia, si consideramos que son "Muy jóvenes"los que tienen "10 años"menos que los "Jóvenes"entonces el modificador "Muy"quedaría:

$$Muy(x) = Min(100, x + 10)$$
$$\mu_{MuyP}(x) = \mu_P(Muy(x))$$

- Si queremos un dilatador, desplazamos la función una cierta distancia, en sentido contrario al concentrador, si consideramos que son "Moderadamente jóvenes"los que tienen "10 años"más que los "Jóvenes"entonces el modificador "Moderadamente"quedaría:

$$mode(x) = Max(0, x - 10)$$
$$\mu_{modeP} = \mu_P(mode(x))$$

- Si queremos un intensificador de contraste, sería algo más complicado:

$$int(x) = \begin{cases} Max(0, x - 10), & \text{si } 0 \leq x \leq 50 \\ Min(100, x + 10), & \text{si } 50 \leq x \leq 100 \end{cases}$$
$$\mu_{bastP} = \mu_P(int(x))$$

Si aplicamos estos modificadores internos al predicado "Joven", obtenemos:

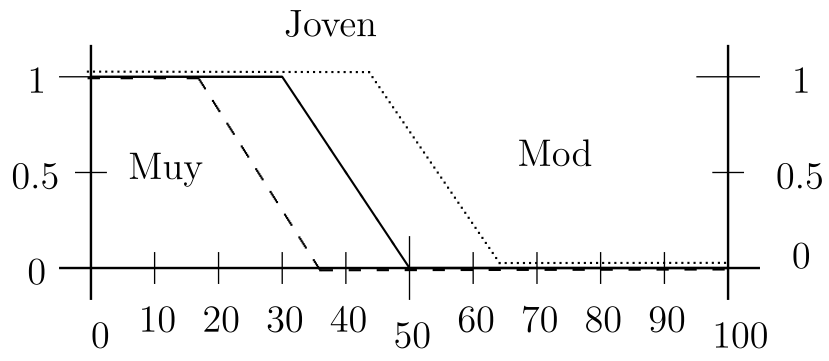


Figura 4.20: Modificadores internos aplicados a Joven

Pero si aplicamos estos modificadores internos al predicado "Temperatura agradable" obtenemos:

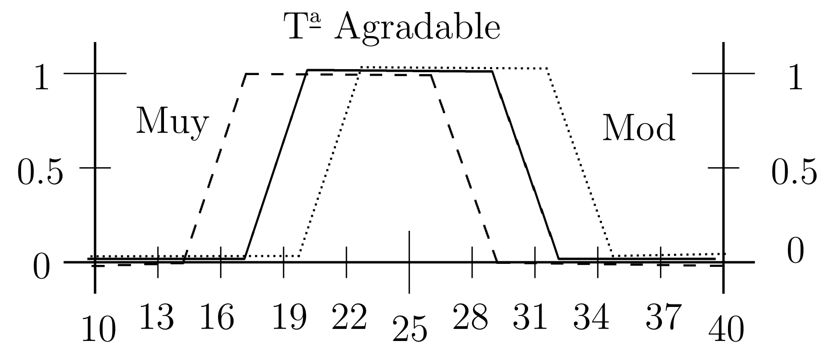


Figura 4.21: Modificadores internos aplicados a Tª Agradable

El problema que tienen estos modificadores es que sólo sirven para predicados que tengan su núcleo tocando uno de los extremos del rango S y que sean no crecientes o no decrecientes. Dependiendo del lado que toquen hay que elegir el desplazamiento adecuado para conseguir un concentrador o un dilatador.

Proponemos otro tipo de modificadores internos que en vez de desplazar la función de pertenencia, encogen o estiran proporcionalmente el núcleo (núcleo es el conjunto de valores en los que la función de pertenencia vale 1, nucleo=$\{x;\ \mu_P(x) = 1\ \forall x \in X\}$) y el soporte (soporte es el conjunto de valores en los que la función de pertenencia es positiva, soporte=$\{x;\ \mu_P(x) > 0\ \forall x \in X\}$) del predicado, para ello usaremos dos valores $r_1$ proporción para el núcleo y $r_2$ proporción para el soporte. A este tipo de modificadores internos los designaremos modificadores proporcionales.

Sean $\{[n_1, n_2], [n_3, n_4], \ldots\}$ el conjunto de intervalos en los que está contenido el núcleo del predicado y $\{[s_1, s_2], [s_3, s_4], \ldots\}$ el conjunto de intervalos en los que está contenido el soporte del predicado, donde $[n_i, n_{i+1}] \subset [s_i, s_{i+1}], \forall i$. Y sean $\{[mn_1, mn_2], [mn_3, mn_4], \ldots\}$ el conjunto de intervalos en los que está contenido el núcleo del predicado modificado y $\{[ms_1, ms_2], [ms_3, ms_4], \ldots\}$ el conjunto de intervalos en los que está contenido el soporte del predicado modificado, cumpliéndose que $[mn_i, mn_{i+1}] \subset [ms_i, ms_{i+1}], \forall i$. Donde cada $mn_i$ y cada $ms_i$ los obtenemos del siguiente modo:

$$mn_i = n_i * r_1 \text{ y } ms_i = s_i * r_2$$

Dependiendo de los valores $r_1$ y $r_2$ obtenemos distintos tipos de modificadores:

- Concentradores: El núcleo y el soporte del predicado modificado están incluidos en el núcleo y en el soporte del predicado. Para conseguir esto tomaremos $r_1$ y $r_2$ que cumplan: $0 < r_1 < r_2 < 1$.

- Dilatadores: El núcleo y el soporte del predicado modificado contienen al núcleo y al soporte del predicado. Para conseguir esto tomaremos $r_1$ y $r_2$ que cumplan: $1 < r_1 < r_2$.

- Intensificadores: El núcleo del predicado modificado contiene al núcleo del predicado pero el soporte del predicado modificado está contenido en el soporte del predicado. Para conseguir esto tomaremos $r_1$ y $r_2$ que cumplan: $0 < r_2 < 1 < r_1$.

Si aplicamos estos modificadores internos proporcionales al predicado "Joven" obtenemos:

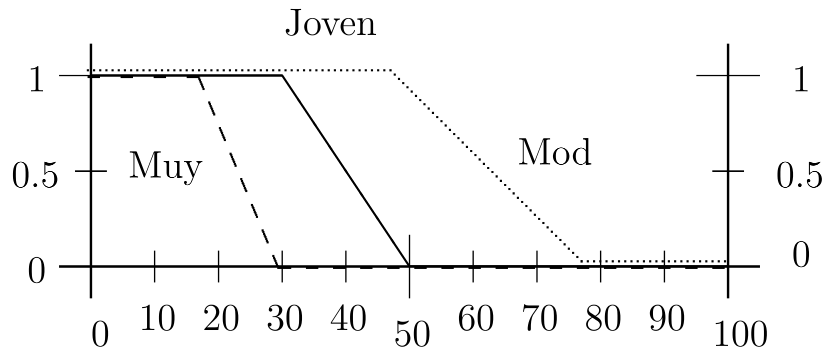


Figura 4.22: Modificadores proporcionales aplicados a Joven

Y si aplicamos estos modificadores internos al predicado "Temperatura agradable" obtenemos:

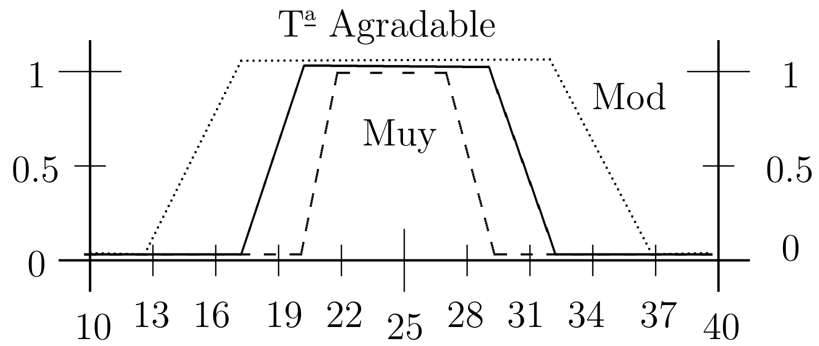


Figura 4.23: Modificadores proporcionales aplicados a Tª Agradable

En estos ejemplos podemos comprobar que los modificadores externos a pesar de su rigidez siempre obtienen predicados modificados que concuerdan con los esperados, pero que en el caso de los modificadores internos basados en un desplazamiento no siempre obtienen los predicados modificados esperados, y también podemos comprobar que para el caso de los modificadores internos proporcionales los predicados modificados que se obtienen sí concuerdan con los esperados y que además son bastantes flexibles.

La elección del modificador adecuado para cada caso, habrá que hacerla contrastando experimentalmente los resultados obtenidos para cada modificador y el comportamiento esperado de cada modificador.

### 4.5.2 Representación de conectivos

Para la representación de los conectivos que usamos en la construcción de predicados compuestos vamos a utilizar, como es habitual, las t-normas y las t-conormas continuas propuestas en el capítulo anterior.

Pero en la elección de cada caso deberemos tener en cuenta el predicado, el antónimo y la negación elegidos con anterioridad, para garantizar que el predicado y su antónimo sean disjuntos.

Como ya explicamos en el capítulo anterior si queremos las propiedades de tercero excluido y no contradicción deberemos elegir una t-norma y una t-conorma de la familia de Łukasiewicz adecuadas para la negación elegida. Es decir, si queremos que un predicado y su negado realicen una partición del intervalo esta será nuestra elección.

Si queremos que entre el predicado y su antónimo haya un término medio y queremos que el predicado, su antónimo y el término medio sean una partición del intervalo, nuestra elección también será elegir una t-norma y una t-conorma de la familia de Łukasiewicz adecuadas para la negación elegida.

Si queremos la conjunción de un predicado con otro contenido en este sea el predicado contenido, entonces nuestra elección será la t-norma mínimo. Y si queremos que la disyunción de un predicado con otro que lo contiene sea el predicado que lo contiene, entonces nuestra elección será la t-conorma máximo.

Si queremos que la conjunción y la disyunción sean interactivas entonces nuestra elección será una t-norma de la familia del producto y una t-conorma de la familia del suma-producto.

Para comprobar que la elección que hemos hecho ha sido la correcta, deberíamos contrastar experimentalmente la conjunción y la disyunción elegida con el uso que hacemos de ella dentro de la variable lingüística.

# 4.6 Representación de relaciones imprecisas entre predicados imprecisos

Las relaciones nos van a permitir expresar una vinculación existente entre las características de los objetos o una vinculación existente entre unos objetos y otros. En el lenguaje expresamos esta vinculación mediante proposiciones relacionales.

Si queremos representar las proposiciones relacionales debemos ser capaces de representar los distintos tipos de relaciones que utilizamos en ellas:

- Simples: Expresan una relación existente entre objetos en función de una característica común, involucran a una sola variable lingüística y a varios objetos. Relaciones de este tipo son por ejemplo: las relaciones de orden y las relaciones de indistinguibilidad.

- Compuestas: Expresan una relación existente entre varias características que tiene un objeto, involucran a varias variables lingüísticas y a un sólo objeto. Relaciones de este tipo son por ejemplo: los conectivos relacionales y las implicaciones.

- Complejas: Expresan una relación existente entre varios objetos, en función de las características que poseen los objetos, involucran a varias variables lingüísticas y a varios objetos. Relaciones de este tipo son por ejemplo: las implicaciones.

Nos centraremos en la proposiciones relacionales compuestas ya que son las más utilizadas.

## 4.6.1 Representación de conectivos relacionales

Para la representación de proposiciones del tipo "x es P & Q"vamos a utilizar como conectivos relacionales las t-normas y las t-conormas continuas vistas en el capítulo anterior, pero la elección de la t-norma y la t-conorma adecuadas se hará en base a criterios semánticos y no sintácticos.

Sobrino propone en [Sob92] para la elección de la conjunción los siguientes casos:

1. Si el sintagma contiene nombre diferentes (ej. Enrique y Alejandro son bajos), la partícula 'y' quiere indicar, en este caso, la unión de los significados de ambos sintagmas y nada referido a su intersección. La sintaxis, en este caso, sería equívoca y quedaría más claro del siguiente modo: "Enrique es bajo, Alejando es bajo".

2. Si el sintagma tiene un nombre común y diferentes propiedades, entonces la elección de un conectivo u otro se basa en criterios semánticos.

   (a) Sea la frase "hombre joven y listo". Dado que ambos sintagmas son independientes uno del otro, la t-norma elegida debería ser el mínimo $T(x, y) = Min(x, y)$.

   (b) Sea la frase "hombre joven y aguerrido". Dado que ambos sintagmas son mutuamente dependientes y uno influencia positivamente en el otro, la t-norma a elegir debería ser el producto $T(x, y) = xy$.

   (c) Por último, sea la frase "hombre joven y vitalmente cansado". Ambos sintagmas son dependientes y uno influencia negativamente en el otro. La t-norma elegida debería ser la de Łukasiewicz $T(x, y) = Max(0, x+y-1)$.

Como reflejo de lo anterior para la elección de la disyunción proponemos los siguientes casos:

1. Si el sintagma contiene nombre diferentes (ej. Enrique o Alejandro son bajos), la partícula 'o' quiere indicar, en este caso, la disyunción de los significados de ambos sintagmas y nada referido a su unión. La sintaxis, en este caso, sería equívoca y quedaría más claro del siguiente modo: "Enrique es bajo o Alejando es bajo".

2. Si el sintagma tiene un nombre común y diferentes propiedades, entonces la elección de un conectivo u otro se basa en criterios semánticos.

   (a) Sea la frase "hombre joven o listo". Dado que ambos sintagmas son independientes uno del otro, la t-conorma elegida debería ser el máximo $S(x, y) = Max(x, y)$.

(b) Sea la frase "hombre joven o aguerrido". Dado que ambos sintagmas son mutuamente dependientes y uno influencia positivamente en el otro, la t-conorma a elegir debería ser la suma-producto $S(x, y) = x + y - xy$.

(c) Por último, sea la frase "hombre joven o vitalmente cansado". Ambos sintagmas son dependientes y uno influencia negativamente en el otro. La t-conorma elegida debería ser la de Łukasiewicz $S(x, y) = Min(1, x + y)$.

### 4.6.2 Representación de implicaciones

Las reglas "Si ... entonces ..."pueden entenderse desde dos puntos de vista como operadores de implicación o como relaciones de implicación (ver [TA00a]).

Como operadores de implicación ($p \rightarrow q$) representan la proposición "Si p entonces q", por ejemplo la implicación material clásica $p \rightarrow_M q = \neg p \vee q$ dice que "Si p entonces q"es considerada equivalente a "no p o q". En este sentido, $\rightarrow$ es un operador que asigna (p,q) a $p \rightarrow q$.

Como relaciones de implicación (se denominan condicionales y van asociados al operador de implicación), $\leq_{\rightarrow}$ representan la relación existente entre 'p' y 'q', que surge cuando afirmamos que $p \rightarrow q$ es verdadera. Por ejemplo, en un álgebra de Boole L, $p \rightarrow_M q = \neg p \vee q = 1$ (lingüísticamente "Si p entonces q"es verdadera) es equivalente a que $p \wedge q = p$, es decir, a que $p \leq q$ y por lo tanto la relación $\leq_{\rightarrow_M}$ coincide con la relación de orden que establece el orden parcial del retículo $(\{0, 1\}, \leq)$.

No todos los operadores de implicación pueden ser expresados mediante los conectivos $\wedge, \vee, \neg$, como ocurre con la implicación material clásica $p \rightarrow_M q = \neg p \vee q$. De todos modos una expresión suficientemente general usando conectivos es:

$$p \rightarrow_G q = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge (q \vee \neg q))$$

y cuando para 'q' se verifica la ley del tercero excluido ($q \vee \neg q = 1$) esta expresión se reduce a:

$$p \rightarrow_Q q = \neg p \vee (p \wedge q)$$

conocido como operador de implicación cuántico.

Si después de representar la regla "Si p entonces q" mediante $p \rightarrow q$ queremos utilizarla para realizar algún tipo inferencia, ésta debería hacerse de un modo concreto. Es decir, la inferencia debería ser dirigida mediante alguna regla de inferencia, de las cuales la más común es la regla del Modus Ponens:

$$\begin{array}{l} \text{“Si p entonces q”} \\ \text{“p”} \\ \hline \hfill \text{“q”} \end{array}$$

Esta inferencia dirigida puede ser formalizada en un retículo $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ mediante:

$$p * (p \rightarrow q) \leq q$$

con $\leq$ el orden parcial de L y $*$ una operación en L que cumpla $1{*}1 = 1$ (normalmente se elige $* = \wedge$).

Esta inecuación conocida como inecuación del Modus Ponens, nos permite afirmar que: $p = 1$(p es verdad) y $p \rightarrow q = 1$($p \rightarrow q$ es verdad) nos lleva a que $q = 1$(q es verdad), dado que $1 * 1 = 1 \leq q$ implica que $q = 1$. Por lo tanto, el siguiente esquema formal traslada el esquema lingüístico anterior:

$$\begin{array}{l} p \leq_{\rightarrow} q \\ p = 1 \\ \hline \hfill q = 1 \end{array}$$

En [TA00a] Trillas y Alsina muestran que en cualquier retículo se cumple que:

$$p \rightarrow_G q \leq p \rightarrow_Q q \leq p \rightarrow_M q$$

y para sus condicionales asociados se cumple:

$$\leq_{\rightarrow_G} \subset \leq_{\rightarrow_Q} \subset \leq_{\rightarrow_M}$$

y si el retículo es un álgebra de Boole, se sigue que:

$$p \rightarrow_G q = p \rightarrow_Q q = p \rightarrow_M q$$

Por lo tanto existen operadores de implicación $\rightarrow \neq \rightarrow_M$ que verifican la inecuación del Modus Ponens con $* = \wedge$ y llevan asociadas condicionales distintos de $\leq_{\rightarrow_M}$.

A continuación expondremos los distintos operadores de implicación más utilizados en lógica borrosa (recogidos de [TA00a] y los ejemplos de [TC98]):

- S-implicaciones: conocidas por implicaciones fuertes o implicaciones materiales, extienden la implicación clásica $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ mediante una t-conorma S y un negación fuerte N, tienen la siguiente forma:

  $$I_S(x,y) = S(N(x),y), \forall x,y \in [0,1]$$

  Un ejemplo es la implicación de Kleene-Dienes:

  $$I_{Max}(x,y) = Max(1-x,y)$$

- R-implicaciones: conocidas por implicaciones residuadas, extienden la implicación clásica mediante residuación de una t-norma, tienen la forma siguiente:

  $$I^T(x,y) = Sup\{z \in [0,1]; T(z,x) \leq y\}, \forall x,y \in [0,1]$$

  Un ejemplo es la implicación de Gödel:

  $$I^{Min}(x,y) = \begin{cases} 1, & si x \leq y \\ y, & si x > y \end{cases}$$

- S-R-implicaciones: pertenecen a las dos familias anteriores y cumplen por tanto la definición de ambas. Un ejemplo es la implicación de Łukasiewicz:

  $$I_{W*}^{W}(x,y) = Min(1, 1-x+y)$$

- Q-implicaciones: conocidas como Quantum implicaciones, extienden la implicación clásica $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee (p \wedge q)$ mediante una t-conorma S, una t-norma T y una negación fuerte N, tienen la forma:

  $$I_Q(S-T)(x,y) = S(N(x), T(x,y)), \forall x,y \in [0,1]$$

  Un ejemplo es la implicación de Willmott:

  $$I_Q(Max-Min)(x,y) = Max(1-x, Min(x,y))$$

- ML-implicaciones: conocidas como Mamdani-Larsen implicaciones, extienden la conjunción clásica $p \rightarrow q \equiv p \wedge q$ mediante una t-norma T y un automorfismo $\varphi$ en $([0,1], \leq)$, tienen la forma:

$$I_{ML}(x, y) = T(\varphi(x), y), \forall x, y \in [0, 1]$$

  Un ejemplo es la implicación propia de Mamdani:

$$I_{ML}(Min)(x, y) = Min(x, y)$$

Dada la infinidad de operadores de implicación que se usan en lógica borrosa, para ayudar a elegir el operador que se adapte mejor a cada regla vamos a proponer una interpretación semántica de cada tipo de operador, usaremos el ejemplo "Si te doy un cachete entonces lloras":

- S-implicaciones: $p \rightarrow q = \neg p \vee q$, este tipo de operador representa que 'p' es condición suficiente pero no necesaria para que se dé 'q', es decir, si $p = 1$ podemos deducir $q$ y si $p = 0$ no sabemos nada a cerca de $q$. Ej: "O no te doy un cachete o lloras", lloras porque te doy un cachete o por otros motivos.

- R-implicaciones: $p \rightarrow q = p \leq q$, este tipo de operador representa que 'p' está incluido en 'q', es decir, que 'p' es condición necesaria pero no suficiente para que se dé 'q'. Ej."Necesitas que te dé un cachete para llorar", que te dé un cachete es necesario para que llores, pero no es suficiente.

- S-R-implicación: $p \rightarrow q = (\neg p \vee q), (p \leq q)$, este operador representa que 'p' es condición necesaria y puede que suficiente para que se dé 'q'. Ej."O no te doy un cachete o lloras, pero necesitas que te dé un cachete para llorar", que te dé un cachete es necesario para que llores y puede que sea suficiente para que llores.

- Q-implicaciones: $p \rightarrow q = \neg p \vee (p \wedge q)$, este tipo de operador representa que 'p' es condición necesaria o suficiente para que se dé 'q'. Ej." O no te doy un cachete o te doy un cachete y lloras", si te doy un cachete seguro que lloras pero puede que no te lo dé y que llores.

- ML-implicaciones: $p \rightarrow q = p \wedge q$, este tipo de operador representa que 'p' $\Leftrightarrow$ 'q', es decir, que 'p' es condición necesaria y suficiente para que se dé 'q'. Ej. "Te doy un cachete y lloras", si te doy un cachete lloras y si lloras es porque te he dado un cachete.

Como otro método para elegir el operador adecuado es en base a las propiedades que cumple, mostraremos a continuación un tabla de propiedades (extraídas en parte de [FY00]), y el tipo de operadores que las cumplen: para todo $x, y, z, t \in [0, 1]$

| Nº | Propiedad | Operador de implicación |
|---|---|---|
| 1 | $I(0,0) = I(0,1) = I(1,1) = 1; I(1,0) = 0$ | S-imp, R-imp, Q-imp. |
| 2 | $I(0,0) = I(0,1) = I(1,0) = 0; I(1,1) = 1$ | ML-imp. |
| 3 | Si $x \leq y$ entonces $I(x,y) \geq I(z,y)$ | S-imp, R-imp, Q-imp |
| 4 | Si $y \leq t$ entonces $I(x,y) \leq I(x,t)$ | Todos |
| 5 | $I(0,x) = 1,$ | S-imp, R-imp, Q-imp |
| 6 | $I(0,x) = 0,$ | ML-imp |
| 7 | $I(x,1) = 1,$ | S-imp, R-imp, Q-imp |
| 8 | $I(1,x) = x,$ | S-imp, R-imp, Q-imp |
| 9 | $I(1,x) \leq x,$ | ML-imp |
| 10 | $I(x,y) = I(y,x),$ | ML-imp |
| 11 | $I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z))$ | Todos |
| 12 | $x \leq y \leftrightarrow I(x,y) = 1$ | S-imp(si $S = W^*$), R-imp, Q-imp(si $S = W^*$ y $T = Min$) |
| 13 | $N(x) = I(x,0)$ es una negación fuerte | S-imp, Q-imp |
| 14 | $I(x,y) \geq y$ | S-imp, R-imp, Q-imp(si $S = W^*$ y $T = W$ o $T = Min$ |
| 15 | $I(x,y) \leq y$ | ML-imp |
| 16 | $I(x,x) = 1$ | S-imp(si $S = W^*$), R-imp, Q-imp(si $S = W^*$ y $T = Min$) |
| 17 | $I(x,y) = I(N(y), N(x))$ | S-imp |
| 18 | I es una función continua | S-imp, Q-imp, ML-imp |

Para elegir dentro de cada tipo de operador de implicación una función concreta nos podemos apoyar en la relación de orden que existe entre las funciones de implicación de cada tipo de operador:

- S-implicaciones:
$$I_{Max} \leq I_{Prod^*} \leq I_{W^*}$$

- R-implicaciones:
$$I^{Min} \leq I^{Prod} \leq I^{W}$$

- Q-implicaciones:
$$\begin{array}{l} I_Q(Max - W) \leq I_Q(Max - Prod) \leq I_Q(Max - Min) \\ I_Q(Prod^* - W) \leq I_Q(Prod^* - Prod) \leq I_Q(Prod^* - Min) \\ I_Q(W^* - W) \leq I_Q(W^* - Prod) \leq I_Q(W^* - Min) \end{array}$$

- ML-implicaciones:
$$I_{ML}(W) \leq I_{ML}(Prod) \leq I_{ML}(Min)$$

Además puede establecerse el siguiente orden parcial entre estas funciones de implicación:

$$I_{ML}(W) \leq I_{ML}(Prod) \leq I_{ML}(Min) \leq \begin{array}{ccc} \diagup & I^{Min} \leq I^{Prod} & \diagdown \\ - & I_Q(Max, W) \leq I_Q(W^*, Min) & - \\ \diagdown & I_{Max} \leq I_{Prod^*} & \diagup \end{array} \leq I^{W} = I_{W^*}$$

Este orden parcial tiene bastante importancia ya que nos permite decidir con que t-norma el condicional asociado al operador de implicación cumplirá la inecuación del Modus Ponens. Para ello usaremos la expresión equivalente de dicha inecuación, propuesta en [TA00a]:

$$T(p(x), (I(p,q)(x,y)) \leq q(y) \Leftrightarrow I(p,q)(x,y) \leq I^{T}(p(x), q(y))$$

# 4.7 Representación de razonamiento basado en conocimiento

Para representar el razonamiento basado en conocimiento vamos a utilizar las reglas de inferencia pero en especial el Modus Ponens generalizado propuesto por Zadeh. Como un caso particular mostraremos el razonamiento basado en observación nítida, que para poder llevarlo a cabo necesita de un proceso de borrosificación y otro de desborrosificación.

## 4.7.1 Reglas de inferencia

Las reglas usuales de inferencia son (ver [Zad92]):

- Regla de vinculación:
  "x es P"
  $P \subseteq Q$, $\mu_P(x) \leq \mu_Q(x), \forall x \in X$.
  ---
  "x es Q"

- Regla de conjunción:
  "x es P"
  "x es Q"
  ---
  "x es P ∩ Q"→ $\mu_{P\cap Q}(x) = \mu_P(x) \wedge \mu_Q(x)$

- Regla de disyunción:
  "x es P"
  ó "x es Q"
  ---
  "x es P ∪ Q"→ $\mu_{P\cup Q}(x) = \mu_P(x) \vee \mu_Q(x)$

- Regla de negación:
  "x no es P"
  ---
  "x es $\neg P$"→ $\mu_{\neg P}(x) = N(\mu_P(x))$

- Regla del Modus Ponens:
  "Si x es P entonces y es Q"
  "x es P"
  ---
  "y es Q"

- Regla composicional:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{“x es P está relacionado con y es Q mediante R(P,Q)”}\\ \text{“x es P”}\end{array}}{\text{“y es } P \circ R\text{”} \rightarrow \mu_{P \circ R}(x) = \underset{x}{Sup}(\mu_P(x) \wedge \mu_R(x,y))}$$

### 4.7.2 Modus ponens generalizado

Si queremos utilizar los operadores de implicación para realizar inferencias usando el Modus Ponens, debemos exigirles como dijimos en el apartado anterior, que su condicional asociado verifique la inecuación del Modus Ponens, es decir:

$$p \wedge (p \rightarrow q) \leq q$$

y traduciendo esta inecuación clásica a una inecuación borrosa queda:

$$T(p(x), I(p,q)(x,y)) \leq q(y)$$

Con esta regla sólo podríamos hacer inferencias si el antecedente de la regla $p \rightarrow q$ coincide con el hecho observado $p = 1$ y deducir en ese caso $q = 1$, pero no si el hecho es ligeramente distinto del antecedente. Y esto es lo que suele ocurrir cuando queremos realizar un razonamiento aproximado, donde los hechos observados cambian, y por lo tanto necesitamos que el método de razonamiento sea flexible. Esto no ocurre en la lógica clásica donde todo está fijo y se usa un método de razonamiento rígido.

Para poder realizar inferencias en este caso Zadeh propuso en [Zad73] la regla del Modus Ponens generalizado, que tiene la forma siguiente:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{“Si x es P entonces y es Q”}\\ \text{“x es } P^*\text{”}\end{array}}{\text{“y es } Q^*\text{”}}$$

Que se traduce usando la regla composicional de inferencia en el esquema funcional siguiente:

$$\frac{\begin{array}{l}P \rightarrow Q = I(P,Q)\\ \mu_{P^*} \text{ con } P^* \approx P\end{array}}{\mu_{Q^*}(x) = \underset{x}{Sup}(\mu_{P^*}(x) \wedge I(x,y))}$$

Este esquema cuando $P^* = P$ se reduce al del Modus Ponens anterior, permitiéndonos por tanto generalizar el Modus Ponens.

En el caso de tener varias reglas:

$$\begin{array}{c} \text{Si } x \text{ es } P_1\text{, entonces } y \text{ es } Q_1 \ (\rightarrow_{I_1}) \\ \text{Si } x \text{ es } P_2\text{,entonces } y \text{ es } Q_2 \ (\rightarrow_{I_2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{Si } x \text{ es } P_n\text{,entonces } y \text{ es } Q_n \ (\rightarrow_{I_n}) \end{array}$$

Dados $P_i^*$ obtendremos un conjunto de conclusiones $Q_i^*$ usando la regla composicional de inferencia:

$$Q_i^* = \underset{x}{Sup}(\mu_{P_i^*}(x) \wedge I_i(x, y))$$

Y ahora debemos agregar los $Q_i^*$ obtenidos para obtener un conjunto borroso único $Q^*$, las formas más usuales de agregar los resultados de cada regla es usando el mínimo (si queremos que el resultado sea la intersección de las reglas) o el máximo (si queremos que el resultado sea la unión de la reglas).

$$\begin{array}{c} Q^* = Max(Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_n^*) \\ Q^* = Min(Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_n^*) \end{array}$$

### 4.7.3 Inferencia con observación nítida

Un caso particular, importante en las aplicaciones, de uso de la regla composicional de inferencia borrosa, es aquel en que $P^*$ es un predicado nítido. En esa hipótesis es:

$$\mu_{P^*}(x) = \begin{cases} 1 & \text{, si x } \in A \\ 0 & \text{, si x } \notin A \end{cases}$$

siendo A el subconjunto clásico de $E_1$ que es la extensión de $P^*$. Entonces, la salida del sistema con una sola regla "Si x es P, entonces y es Q", es:

$$\mu_{Q^*}(y) = \underset{x \in E_1}{Sup}\, T(\mu_{P^*}(x), I(\mu_P(x), \mu_Q(y)) = \underset{x \in A}{Sup}\, I(\mu_P(x), \mu_Q(y))$$

ya que si $x \notin A$ es $\mu_{P^*}(x) = 0$.

Si la función I es continua en su primera variable, resulta:

$$\mu_{Q^*}(y) = I(\underset{x \in A}{Sup}\, \mu_P(x), \mu_Q(y)), \text{ para todo } y \in E_2.$$

En el caso particular en que $A = \{x_0\}$, es decir, en que $P^*$ es el predicado "igual a $x_0$", se obtiene la función de salida:

$$\mu_{Q^*} = I(\mu_P(x_0), \mu_Q(y)), \text{ para todo } y \in E_2.$$

En todos esos casos el esquema inferencial resultante es el siguiente:

$$\begin{array}{r} \text{Si x es P, entonces y es Q} \\ x = x_0 \text{ (xes igual a } x_0\text{)} \\ \hline \text{y es } Q^* \end{array}$$

con $\mu_{Q^*}$ dado por la fórmula anterior.

En las aplicaciones a la teoría del control se requiere que la salida "y es $Q^*$"se precisifique a "y es $y_0$", con $y_0 \in E_2$; es decir, se requiere una conclusión (o *salida*) numérica. ¿Cómo hacerlo? En la práctica se aplican diversos métodos llamados de *desborrosificación*; entre ellos, uno de los más usados es el de igualar $y_0$ al centro de gravedad de la figura geométrica bajo la curva $\mu_{Q^*}$.

En la práctica los sistemas están regidos por varias reglas. Sin embargo, con más de una regla y una única observación numérica, cabe proceder igual que en el caso anterior, suponiendo que se trata de la disjunción con el máximo de las reglas. Es decir, si se trata de las reglas:

$$\begin{array}{c} \text{Si } x_1 \text{ es } P_1\text{, entonces } y_1 \text{ es } Q_1 \\ \text{Si } x_2 \text{ es } P_2\text{, entonces } y_2 \text{ es } Q_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \text{Si } x_n \text{ es } P_n\text{, entonces } y_n \text{ es } Q_n, \end{array}$$

representadas, respectivamente, por funciones de implicación $I_1, I_2, \dots, I_n$, entonces se tienen las salidas:

$$\begin{array}{l} I_1(\mu_{P_1}(x_1^0), \mu_{Q_1}(y_1)) \text{ para todo } y_1\text{, de la primera} \\ I_2(\mu_{P_2}(x_2^0), \mu_{Q_2}(y_2)) \text{ para todo } y_2\text{, de la segunda} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ I_n(\mu_{P_n}(x_n^0), \mu_{Q_n}(y_n)) \text{ para todo } y_n\text{, de la n-sima,} \end{array}$$

Y ahora se pueden usar dos modos para hallar una única salida numérica, (ver [Per94]):

- Modo A-FATI (First Aggregate Then Infer), donde primero agregamos la salida de cada regla mediante el máximo o el mínimo y después desborrosificamos.
- Modo B-FITA (First Infer then Aggregate), donde primero desborrosificamos la salida de cada regla y después agregamos usando sumas ponderadas.

Los métodos que vamos a usar para desborrosificar son los que Peregrín recoge en [Per94] como los que mejor resultado dan en general:

- Centro de gravedad (CG): donde concentramos toda la información de la función en el centro de gravedad de su curva. El valor resultante es:

$$y_0 = \frac{\int y \cdot \mu_{Q^*}(y)dy}{\int \mu_{Q^*}(y)dy}$$

- Media de los máximo (MOM): donde concentramos toda la información de la función en el punto medio de los que alcanzan el valor máximo de la función. El valor resultante es:

$$\begin{aligned} y_1 = &\quad Inf\{z : \mu_{Q^*}(z) = \underset{y \in Y}{Sup}(\mu_{Q^*}(y))\} \\ y_2 = &\quad Sup\{z : \mu_{Q^*}(z) = \underset{y \in Y}{Sup}(\mu_{Q^*}(y))\} \\ y_0 = &\quad \tfrac{y_1+y_2}{2} \end{aligned}$$

- Punto de máximo valor (PMV): donde concentramos toda la información de la función en el punto en el que toma su máximo valor, si hubiera varios hallaríamos su media. El valor resultante es:

$$y_0 = \{y \in Y : \mu_{Q^*}(y) = \underset{y \in Y}{Sup}(\mu_{Q^*}(y))\}$$

Vamos a utilizar los siguiente métodos, que combinan un método de desborrosificación y un modo de operación:

- Método $M_1$, trabaja en Modo A agregando con el máximo y desborrosificando usando CG. Por tanto el valor resultante sería:

$$y_0 = CG(Max(\mu_{Q_1^*}(y), \mu_{Q_2^*}(y), \ldots, \mu_{Q_n^*}(y))$$

- Método $M_2$, trabaja en Modo A agregando el máximo y desborrosificando usando MOM. Por tanto el valor resultante sería:

$$y_0 = MOM(Max(\mu_{Q_1^*}(y), \mu_{Q_2^*}(y), \ldots, \mu_{Q_n^*}(y))$$

- Método $M_3$, trabaja en Modo B desborrosificando usando PMV y agregando usando sumas ponderadas por el grado de emparejamiento h, con:

$$h_i = T(\mu_{P_i}(x_0), \mu_{P_i}(x_1), \ldots, \mu_{P_i}(x_n))$$

  Por tanto el valor resultante sería:

$$y_0 = \frac{\sum_i h_i \cdot PMV(\mu_{Q_i^*}(y))}{\sum_i h_i}$$

# Capítulo 5

# Aplicación a un sistema informático CW00 (Computing with Words, prototipo 0 - versión 0)

En este capítulo explicaremos qué nos motivó a construir un sistema informático, para qué lo necesitábamos, qué características debía tener, qué funcionalidades nos debería ofrecer y hacia dónde nos permite avanzar.

## 5.1 Motivaciones para la construcción del sistema informático CW00

Nuestra motivación principal es la pretensión de llegar a construir, algún día, un sistema informático que sea capaz de computar con palabras, es decir, que se comunique con el usuario mediante el lenguaje natural y que razone utilizando tal lenguaje.

Intentar en este momento construir completamente ese sistema nos parece inviable, pero dado que queremos conseguirlo algún día, debemos empezar quizás por una parte pequeña, pero que nos sea accesible, viable y nos permita acercarnos un poquito más a nuestras pretensiones.

El sistema informático CW00 pretende ser un primer paso en la dirección adecuada para seguir avanzando y clarificar cómo debería ser ese futuro sistema, ya que al intentar resolver un problema concreto suelen surgir otros problemas en los que no se había pensado antes y que no se hubieran descubierto de otro modo.

Conscientes de que CW00 es sólo el primer prototipo de una serie de prototipos, y que además se encuentra en su versión inicial, debemos tener claro que no se va a resolver el problema principal, pero sí que nos va a permitir experimentar con pequeños problemas y cuestionar las actuales aproximaciones teóricas.

Uno de los posibles componentes que tendrá ese futuro sistema, será un componente de representación de conocimiento, que le permita hacerlo de un modo conveniente para su posterior utilización.

El primer paso hemos decidido darlo, por tanto, en la parcela de la representación de conocimiento impreciso mediante la representación del significado de su expresión en el lenguaje, donde tenemos un conjunto de teorías, las de conjuntos borrosos, que nos permiten abordar el problema con una buena base teórica y experimental.

A lo largo de este trabajo hemos revisado parcialmente las teorías de conjuntos borrosos para que nos permitan una mejor representación del conocimiento impreciso, y nos hemos dado cuenta de que es fundamental experimentar con los modelos propuestos para comprobar que se aproximan lo suficiente al conocimiento que queremos representar.

El CW00 surge como un sistema informático que nos permita experimentar con distintos modelos de representación y con la intención de que nos ayude a elegirlos convenientemente. Por ejemplo: como el método propuesto para construir el modelo del uso de un predicado, provoca que el modelo necesite de muchas comprobaciones, ajustes y modificaciones, sería conveniente disponer de un sistema informático que nos permita representar el modelo, comprobarlo, ajustarlo y modificarlo de acuerdo a nuestras necesidades. No dando nada por definitivo antes de de un contraste razonable con lo que se quiere decir mediante las palabras empleadas.

## 5.2 Especificación de requisitos

Empezamos con la siguiente la siguiente lista de requisitos generales:

- Queremos un sistema que nos permita representar conocimiento.
- Debe servir para avanzar hacia la computación con palabras.
- El sistema usará lógica borrosa para representar el conocimiento.
- El sistema interactuará con el usuario para conseguir representar dicho conocimiento.
- El sistema utilizará los métodos propuestos en este trabajo para representar conocimiento impreciso.
- El sistema tendrá capacidad de inferencia.

Al final del ciclo de vida utilizado (éste se describirá en el siguiente apartado) hemos llegado a los siguientes requisitos que el sistema CW00 debe cumplir:

- Desde el punto de vista teórico:
  - Debe permitir comprobar experimentalmente los modelos propuestos en el capítulo 4.
  - Debe permitir comprobar la viabilidad de la aplicación práctica de los métodos propuestos.
  - Debe permitir comparar la diferencias entre los distintos modelos.
  - Debe permitir representar proposiciones que expresen conocimientos y para ello necesitaremos poder representar:

1. Universos de discurso.
2. Variables lingüísticas.
3. Predicado simples.
4. Negaciones.
5. Antónimos.
6. Modificadores.
7. Conectivos.
8. Conectivos relacionales.
9. Implicaciones.
10. Reglas.
11. Hechos.

  - Debe proporcionar algún método de inferencia (como mínimo el Modus Ponens Generalizado, tanto numérico como lingüístico).
  - Debe permitir usar distintos tipos de teorías de conjuntos borrosos.

- Desde el punto de vista del usuario:
  - Debe permitir al usuario experimentar, es decir, el usuario tiene que poder repetir los experimentos y poder cambiarlos para ver que ocurre después de cada cambio.
  - Debe encargase de preguntar al usuario y de efectuar los cálculos (que es lo que mejor hacen los ordenadores) y dejar al usuario que responda y decida (que eso lo hacen bastante bien las personas), teniendo especial cuidado en no forzar las respuestas.
  - Debe permitir al usuario cambiar todas las respuestas que haya dado y ver como afectan a los resultados.
  - Debe ser amigable para el usuario, es decir, que el usuario entienda las preguntas y que las pueda responder, y que además entienda la representación de los modelos obtenidos.
- Desde el punto de vista del análisis:

  - Teniendo en cuenta que actualmente no se pueden precisar todas las características del sistema, debemos utilizar un ciclo de vida que nos permita añadirlas más tarde.
  - Debe cubrir el mayor rango posible de problemas.
  - Nos debe permitir clarificar los problemas actuales y proponer nuevos problemas y nuevas soluciones.

- Desde el punto de vista del diseño:
  - Tiene que ser de rápido desarrollo, ya que es un prototipo.
  - Tiene que ser reutilizable, ya que es un prototipo pero no de usar y tirar, queremos ampliarlo en un futuro.
  - Tiene que ser viable, ya que queremos que poder llevarlo a cabo.
  - Tiene que ser lo más robusto que se pueda, ya que queremos que funcione correctamente.
  - Tiene que funcionar lo suficientemente rápido para que pueda ser interactivo.
  - Tiene que ser visual, para permitir una mejor interacción con el usuario.
  - Todo lo que pueda hacerse mediante ratón tiene que poder hacerse mediante teclado. Para que en el futuro se pueda sustituir el teclado por un reconocedor de órdenes verbales.

- Desde el punto de vista de la validez:
  - El sistema deberá ser consistente con los planteamientos teóricos.
  - Deberá poder probarse con múltiples ejemplos que nos permitan una cierta confianza de su validez.
  - Deberá ser revisado y comprobado por personas distintas a los desarrolladores.

- Desde el punto de vista de la integración:
  - Dado que es el prototipo inicial, actualmente no necesita integrarse con otros sistemas, pero debe permitir que sistemas futuros se integren con él.
  - Debe funcionar bajo un sistema operativo usual.
- Desde el punto de vista del mantenimiento:
  - El sistema debe mantenerse adecuadamente para permitir que evolucione.
  - Debe requerir el mínimo mantenimiento posible, para ello debe contener el mínimo número de errores posibles.
- Desde el punto de vista de la reutilización:
  - Necesitaremos que el diseño sea lo más reutilizable posible, ya que pretendemos realizar nuevas versiones y nuevos prototipos.
  - Necesitaremos un diseño lábil, es decir, que pueda ir evolucionando según nuestras necesidades.
- Desde el punto de la portabilidad:
  - Actualmente no se requiere que sea portable.
  - Pero debe permitirse esa posibilidad ya que que en un futuro, aunque no próximo, pueda que sí se requiera.

## 5.3 Ciclo de vida

Después de analizar los requisitos generales anteriores hemos decidido utilizar el ciclo de vida: “prototipo evolutivo”que consta de las siguientes fases:

1. Análisis: se analiza una parte del problema, la que mejor este definida.
2. Diseño: se hace un diseño adecuado para esa parte del problema.
3. Implementación: se implementa ese diseño generando un prototipo.

4. Análisis 2: vuelta a empezar, se utiliza el prototipo para clarificar un poco más el problema y se analiza otra parte del problema.
5. Diseño 2: se amplia o varia el diseño anterior para incluir las modificaciones del análisis.
6. Implementación 2: se amplia o modifica la implementación anterior para introducir los cambios en el diseño.

   ⋮

N. Análisis N.

   ⋮

Este ciclo de vida es cíclico, es decir, se repite hasta que el análisis, diseño e implementación del sistema que se obtiene se ajustan lo suficiente al problema.

Para poder utilizar este ciclo de vida hemos necesitado que el diseño sea lábil, es decir que admita cambios fácilmente, para ello hemos utilizado un modelado orientado a objetos y patrones. Y para que la implementación sea fácil de cambiar hemos utilizado el compilador DELPHI que es de alto nivel y visual (para que sea más rápido el desarrollo) y orientado a objetos para que nos permita implementar nuestro diseño convenientemente.

El análisis, diseño e implementación actuales serán revisados en un futuro próximo para conseguir otras versiones de este prototipo o distintos prototipos que nos permitan ir acercándonos poco a poco a la computación con palabras.

## 5.4 Características generales de CW00

Las características generales que presenta son:

- Es un sistema informático visual desarrollado con DELPHI para Windows 95-98.
- Consta de un interface gráfico amigable para interactuar con el usuario.
- Consta de una pantalla principal, donde el usuario puede elegir qué quiere hacer en cada momento y donde puede consultar datos principales de cada objeto así como ver su representación gráfica si éste la tiene.

- Consta de una o varias pantallas para cada acción, donde el usuario contesta a las preguntas que el sistema le propone y acepta el modelo construido en base a sus respuestas. Todas las respuestas son revisables por el usuario en cualquier momento.

- Tiene perfectamente separados la parte de interface y los modelos de representación utilizados. Para que cambios en el interface no afecten a la representación y viceversa.

- Los modelos de representación son independientes de las pantallas utilizadas para llegar a ellos. De hecho a lo largo del desarrollo se han cambiado varias veces las pantallas sin que eso afectase a la parte de representación.

- Permite guardar y recuperar los modelos construidos en cualquier momento, sin necesidad de que estén terminados.

## 5.5 Funcionalidades que ofrece CW00

Después de sucesivas iteraciones del ciclo de vida, en este momento el prototipo CW00 ofrece la siguientes funcionalidades:

- Permite describir los universos de discurso que se van a utilizar en la representación. Un universo de discurso consta de:
  - Nombre.
  - Descripción.
- Permite especificar las variables lingüísticas de cada universo de discurso que vamos a utilizar para construir proposiciones. Las variables lingüísticas constan de:
  - Nombre.
  - Universo de discurso.
  - Característica medible.
  - Unidades de medida.
  - Rango de definición.
  - Un conjunto de términos principales, los predicados simples.
  - Una negación.
  - Un conjunto de cercas lingüísticas, los modificadores.
  - Un conjunto de conectivos.
- Permite especificar los predicados simples de una variable lingüística mediante un conjunto borroso que lo represente. Un conjunto borroso consta de:
  - Nombre.
  - Orden parcial que induce el uso del predicado.
  - Si la variación del grado respecto del orden parcial es lineal o lineal a trozos.

  - Función de pertenencia, esta puede ser lineal obteniendo funciones trapezoidales o lineal a trozos para obtener funciones que se aproximen a curvas.

- Permite elegir la negación que vamos a utilizar para los predicados de cada variable lingüística.

- Permite especificar el antónimo de cada predicado. Un antónimo consta de:

  - Nombre.
  - Tipo de antónimo.
  - Orden parcial que induce su uso.
  - Función de pertenencia.

- Permite especificar el conjunto de modificadores que vamos a utilizar para delimitar el significado de los predicados. Un modificador consta de:

  - Nombre.
  - Tipo de modificador (concentrador, dilatador, intensificador de contraste).
  - Operador que usamos para construirlo (ver capítulo 4 sección 5.1).

- Permite especificar el conjunto de conectivos que vamos a utilizar para construir predicados compuestos. Un conectivo consta de:

  - Nombre.
  - Tipo de conectivo (conjuntivo, disyuntivo).
  - Operador que usamos para construirlo (ver capítulo 4 sección 5.2).

- Permite especificar dos tipos de relaciones entre distintas variables lingüísticas, una mediante conectivos relacionales y otra mediante implicaciones.

- Permite especificar conectivos relacionales que reflejen la relación existente entre dos variables lingüísticas. Un conectivo relacional consta de:

  - Nombre.
  - Variables lingüísticas que relaciona.

  - Tipo de conectivo relacional (conjunción, disyunción).
  - Operador que especifique el tipo de relación que hay entre los predicados de las variables lingüísticas. Si son independientes, si son dependientes y uno influye positivamente en el otro o si son dependientes y uno influye negativamente en el otro.

- Permite especificar implicaciones que reflejen la relación existente entre dos variables lingüísticas de un universo de discurso con otra variable lingüística del mismo universo de discurso o de otro. Una implicación consta de:
  - Nombre.
  - Variables lingüísticas que relaciona.
  - Tipo de implicación (S-implicación, R-implicación, Q-implicación o ML-implicación).
  - Operador de implicación que represente la relación existente (ver en el capítulo 4 sección 6 los posibles operadores).

- Permite especificar reglas que expresen proposiciones relacionales con dos predicados considerados antecedentes relacionados mediante un conectivo relacional y de un predicado considerado consecuente relacionado con los antecedentes mediante una implicación. Una regla consta de:
  - Dos antecedentes.
  - Un conectivo relacional.
  - Una implicación.
  - Un consecuente.

- Permite especificar hechos que expresen proposiciones enunciativas consideradas como ciertas. Un hecho consta de:
  - Tipo de hecho (nítido o borroso).
  - Variable.
  - Valor que toma la variable, puede ser un valor numérico si el hecho es nítido o un predicado si el hecho es borroso.

- Permite realizar inferencias aplicando el Modus Ponens generalizado al conjunto de reglas y hechos definidos.

- Ofrecerá una deducción parcial para cada regla con sus antecedentes definidos mediante hechos, resultado de la aplicación del Modus Ponens a cada regla y a sus hechos relacionados.

- Permitirá agregar en una o en varias deducciones globales (el número dependerá del número de consecuentes distintos utilizados en las reglas) las deducciones parciales de cada regla usando para ello el máximo o el mínimo.

- Permitirá elegir un método de desborrosificación, que convierta las deducciones parciales y globales en valores numéricos.

## 5.6 Ejemplos de proposiciones representables en CW00

Estos son algunos ejemplos de proposiciones enunciativas representables en el sistema CW00:

1. "Juan es alto".
2. "Pedro es bajo".
3. "Luis no es alto".
4. "La temperatura es muy baja".
5. "La temperatura es moderadamente alta".
6. "La temperatura es bastante agradable".
7. "La temperatura es extrema".
8. "Juan es pesado o ligero".
9. "Pedro no es ni pesado ni ligero".
10. "Luis es bastante pesado aunque no muy pesado".
11. "X aproximadamente 2".
12. "X es igual a 3".
13. "X es menor que 5".
14. "X es aproximadamente mayor que 5".
15. "X está entre 3 y 8".
16. "La botella está medio llena".
17. "La botella está medio vacía".
18. "La botella no esta muy llena pero sí bastante llena".

Estos son algunos ejemplos de proposiciones relacionales representables en el sistema CW00:

1. "Si la botella está llena entonces es pesada".
2. "Si la botella es ligera entonces no esta llena".
3. "Si la botella es muy ligera entonces esta vacía".
4. "Si la casa no es ni grande ni pequeña entonces su precio es moderado".
5. "Si la casa es bastante pequeña entonces su precio es moderadamente bajo y no muy alto".
6. "Si la casa es pequeña sus ventanas son pequeñas".
7. "Si la casa es bastante grande sus ventanas son moderadamente grandes".
8. "Si la botella está llena puedo llenar muchos vasos".
9. "Si la botella está vacía no puedo llenar ningún vaso".
10. "Si la botella está medio llena puedo llenar algunos vasos".
11. "Si la botella está muy vacía o bastante vacía puedo llenar aproximadamente medio vaso".
12. "Si Juan es alto y pesado entonces es grande".
13. "Si Pedro es bajo y moderadamente pesado entonces es moderadamente pequeño".
14. "Si Luis no es ni alto ni bajo y es bastante ligero entonces no es grande".

Utilizando esta gran variedad de proposiciones y los distintos tipo de modificadores, conectivos, relaciones e implicaciones que ofrece el sistema CW00 pueden representarse reglas bastante complejas que nos permitan realizar una amplia variedad de razonamientos basados en inferencias, especialmente los basados en la regla composicional de inferencia y el Modus Ponens generalizado (tanto numérico como lingüístico).

## 5.7 Diseño general de CW00

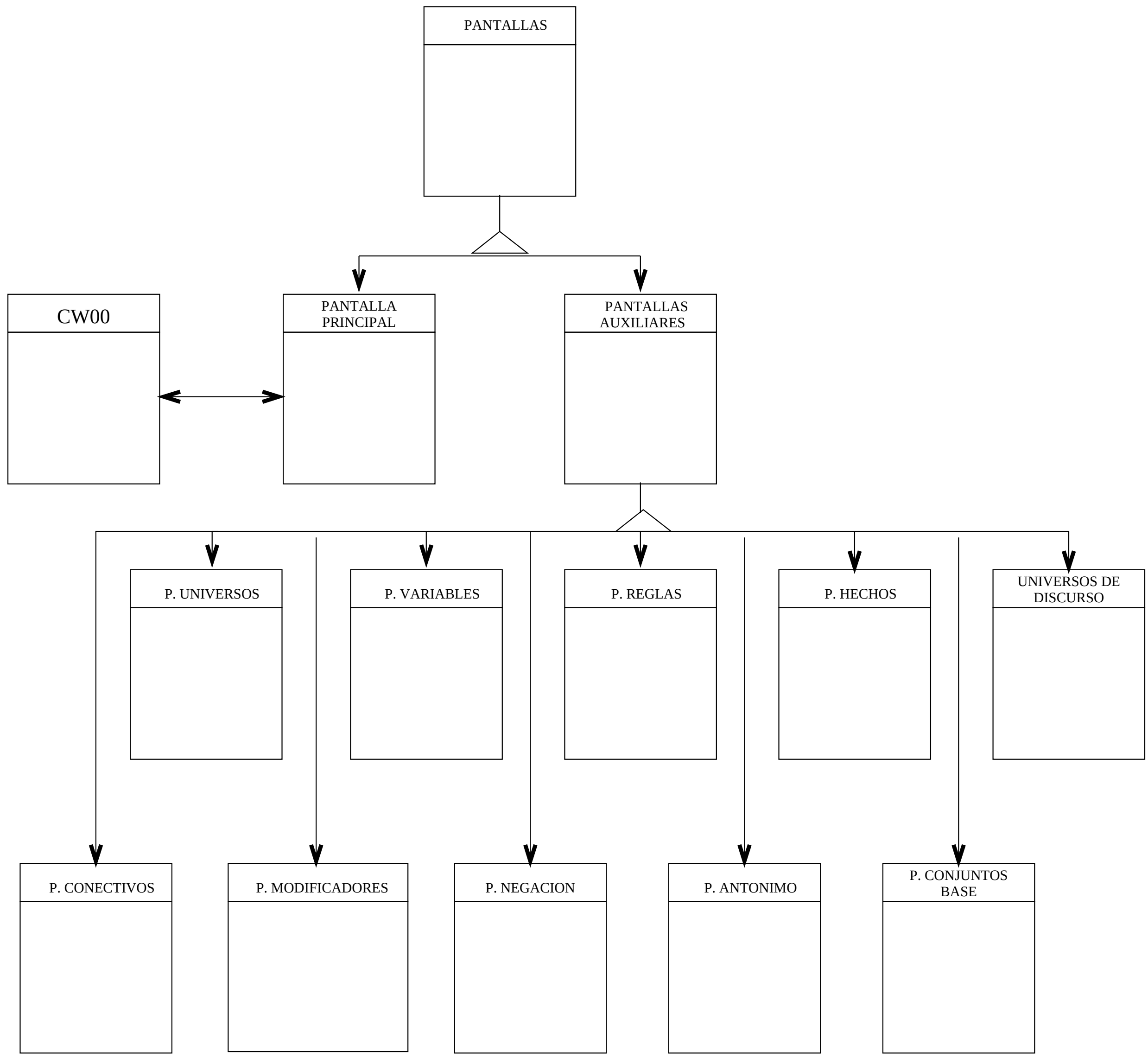


Figura 5.1: Diseño del interface

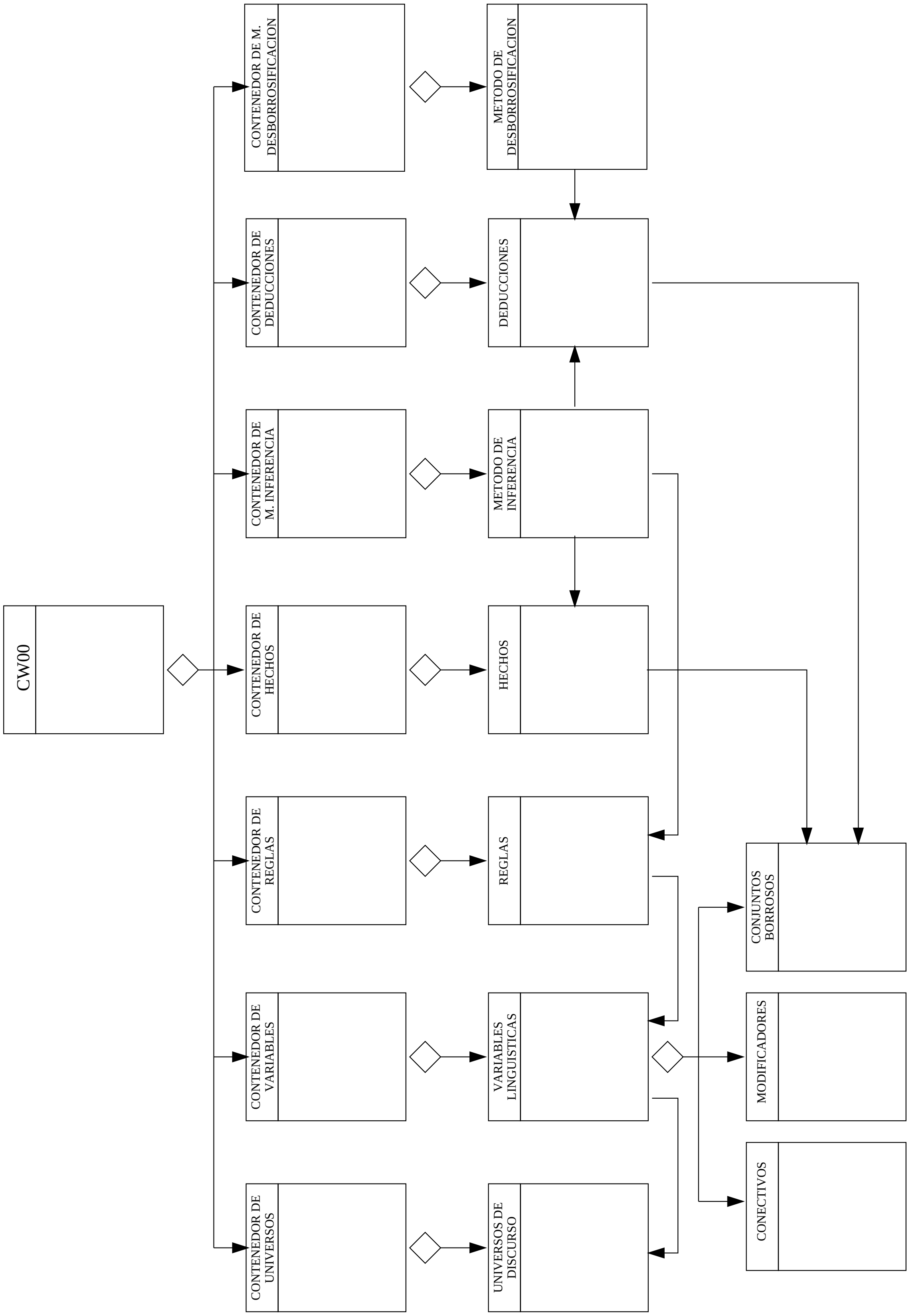


Figura 5.2: Diseño general

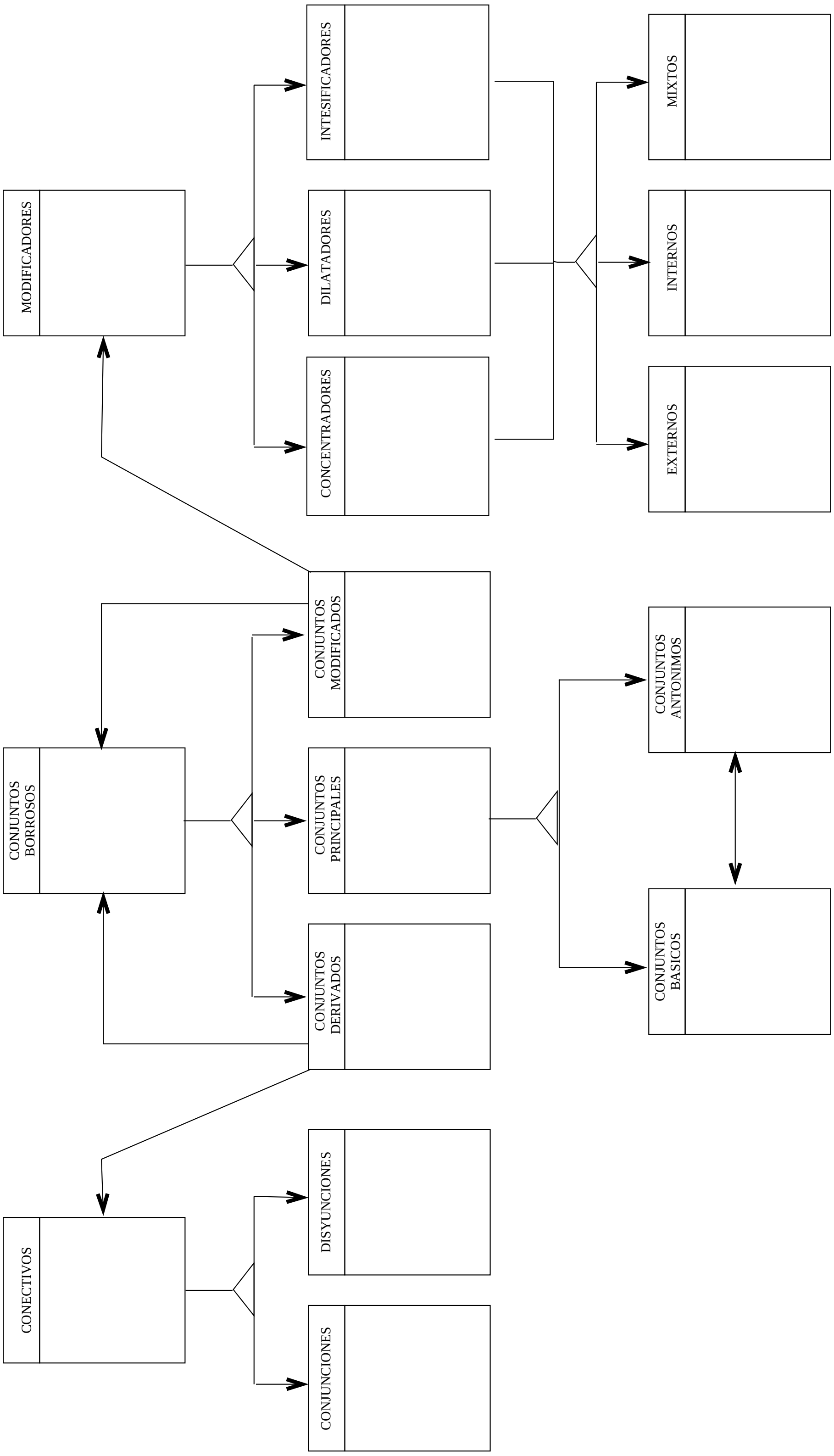


Figura 5.3: Diseño de la representación

# Capítulo 6

# Conclusiones generales

Después de haber recorrido esta pequeña parte del camino hacia la computación con palabras debo reflexionar brevemente sobre lo que he aprendido y hacia dónde quiero dirigir mis futuros esfuerzos.

He podido comprobar que las teorías de conjuntos borrosos ofrecen un buen marco teórico desde el que estudiar la imprecisión y los problemas que conlleva su gestión. Pero también me he percatado de la importancia que tiene la experimentación de los modelos propuestos teóricamente para conseguir una buena adecuación a situaciones reales.

Al lo largo de este trabajo he realizado un estudio detallado de las teorías actuales de conjuntos borrosos, que me ha permitido proponer algunas revisiones parciales de ellas para que nos permitan representar de un modo mejor el conocimiento impreciso.

Además he realizado un prototipo inicial del sistema informático CW00 para poder experimentar con los modelos propuestos en las teorías y que me ha permitido comprobar que esos modelos teóricos permiten hacer representaciones más fieles al significado que las realizadas con los modelos anteriores.

En este proceso de trabajo teórico y de experimentación de teorías, unas veces he avanzado primero en el plano teórico y después comprobado la validez de las nuevas propuestas experimentalmente, y otras veces la experimentación me ha permitido cuestionarme las teorías y así conseguir nuevas propuestas teóricas que recojan nuevos problemas.

De este modo creo que debo seguir avanzando hacia la meta de computar con palabras.

# Bibliografía


[ATV83] C. Alsina, E. Trillas, y L. Valverde. On some logical connectives for fuzzy sets theory. *Jour. Math. Anal. Appl.*, 93:15–26, 1983.

[BG73] R. Bellman y M. Giertz. On the analyic formalism of the theory of fuzzy sets. *Inform. Sci.*, 5:149–156, 1973.

[BT00] T. Bilgic y I. B. Türsen. Measurement of membership functions: Theoretical and empirical work. En Didier Dubois y Henri Prade, editores, *Fundamentals of Fuzzy Sets*, The Handbooks of Fuzzy Sets, chapter 3. Kluwer Academic, 2000.

[Cue97] J. Cuena. *Sistemas Inteligentes. Conceptos, Técnicas y Métodos de Construcción.* Facultad de Informática, 1997.

[DOP00] D. Dubois, W. Ostasiewicz, y H. Prade. Fuzzy sets: History and basic notions. En Didier Dubois y Henri Prade, editores, *Fundamentals of Fuzzy Sets*, The Handbooks of Fuzzy Sets, capítulo 1. Kluwer Academic, 2000.

[FY00] J. Fodor y R. Yager. Fuzzy set-theoretic operators and quantifiers. En Didier Dubois y Henri Prade, editores, *Fundamentals of Fuzzy Sets*, The Handbooks of Fuzzy Sets, capítulo 2. Kluwer Academic, 2000.

[GNCJ97] A. Gómez, N.Juristo, C.Montes, y J.Pazos. *Ingeniería del conocimiento.* Centro de estudios Ramón Areces, 1997.

[HC76] H. M. Hersh y A. Caramazza. A fuzzy set approach to modifiers and vagueness in natural language. *Experimental Psycholgy: General*, 105(3):254–276, 1976.

[LL82] A. Lehrer y K. Lehrer. *Linguistics and Philosophy*, volumen 5, páginas 483–501. 1982.

[Lyo77] J. Lyons. *Semantica*, páginas 253–283. Teide, Barcelona, 1977.

[Per94] Antonio Peregrín. *Integración de operadores de implicación y métodos de defuzzificación en sistemas basados en reglas difusas. Implementación, análisis y caracterización.* Tésis doctoral, Universidad de Granada, E.T.S. de Ingeniería de Informática, Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, 1994.

[Sob92] A. Sobrino. Lógica borrosa y lingüística. In *Aplicaciones de la lógica borrosa*, páginas 89–105. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1992.

[ST99] A. R. De Soto y E. Trillas. On antonym and negate in fuzzy logic. *International Journal of Intelligent Systems*, 14:295–303, 1999.

[Sug74] S. Sugeno. *Theory of Fuzzy Integrals an its applications.* PhD thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974.

[TA99] E. Trillas y C. Alsina. A reflection on what is a membership function. *Mathware & Soft-Computing*, 6:201–215, 1999.

[TA00a] E. Trillas y C. Alsina. On the law $[p \wedge q \rightarrow r] = [(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)]$. *IEEE Transactions in Fuzzy Systems*, 2000. Publicación en curso.

[TA00b] E. Trillas y C. Alsina. An outline of a naïve loose-set theory. En *Proceedings IPMU 2000*, volumen II, páginas 857–863, Madrid, 2000.

[TAJ99] E. Trillas, C. Alsina, y J. Jacas. On a theory of fuzzy sets with or without non-empty selfcontradictions. *Int. Jour. of Intel. Systems*, 1999.

[TC98] E. Trillas y S. Cubillo. *Primeras lecciones de lógica borrosa*. Facultad de Informática, 1998.

[TC00] E. Trillas y S. Cubillo. On a type of antonymy in F([a,b]). En *Proceedings IPMU 2000*, volumen III, páginas 1728–1734, Madrid, 2000.

[Tri79] E. Trillas. Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntos difusos. *Stochastica*, 3:47–84, 1979.

[Vil82] M. Vilela. *Biblos*, volumen LVIII, páginas 45–74. 1982.

[Wit81] L. Wittgenstein. *Philosophical Investigations*. Basil Blackwell, Oxford, 1981.

[Zad65] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.

[Zad73] L.A. Zadeh. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics*, 3:28–44, 1973.

[Zad92] L. A. Zadeh. Representación del conocimiento en lógica borrosa. En *Aplicaciones de la lógica borrosa*, páginas 51–73. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1992.